УДК 621.01

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ МАНИПУЛЯТОРА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

DETERMINATION OF FREQUENCIES OF FREE VIBRATIONS OF THE PARALLEL STRUCTURE MANIPULATOR

С.В. ХЕЙЛО, М.А. ШИРИНКИН, В.А. ГЛАЗУНОВ
S.V. HEJLO, M.A. SHIRINKIN, V.A. GLAZUNOV

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)
(Moscow State Textile University "A.N. Kosygin")
E-mail: office@msta.ac.ru

Работа посвящена расчету собственных частот манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы. Описана методика определения собственных частот. Составлены уравнения движения манипулятора. Приведен численный пример расчета собственных частот.

The paper is devoted to the calculations of frequencies of free vibrations of the parallel structure mechanism with three degrees of freedom. The technique of determination of free vibrations frequencies is described. The equations of the manipulator movement are presented. Results of calculations of natural frequencies are given.

Ключевые слова: механизмы параллельной структуры, свободные колебания.

Keywords: parallel structure mechanisms, natural frequencies of free fluctuations.

Повышение технического, организационного и экономического уровней, а следовательно, и конкурентоспособности крупных предприятий текстильной промышленности, во многом зависит от степени автоматизации и роботизации как основных технологических, так и вспомогательных транспортных операций производства. В настоящее время промышленные манипуляторы, в основном последовательной структуры, с разным числом степеней свободы достаточно широко применяются для распаковки и разборки кип, установки и съема текстильных поковок на прядильных машинах, съема и упаковки чулочно-носочных изделий, обжима бобин в крашении и т.д. [1].

Манипуляторы параллельной структуры, по сравнению с манипуляторами последовательной структуры, имеют повышенные показатели грузоподъемности и точности. В связи с этим их внедрение является перспективным и актуальным с точки зрения модернизации текстильных предприятий.

Обеспечение устойчивости равновесия и несущей способности манипуляторов параллельной структуры является одной из важнейших задач, решаемых при проектировании грузоподъемных механизмов данного класса. Собственные колебания механизма происходят в изолированной системе после внешнего воздействия. Характер колебательного процесса определяется только внутренними силами системы, зависящими от физического строения системы. Внешние силы весьма разнообразны по своей природе. Источниками возникновения внешней силы могут быть инерционные эффекты, кратковременный импульс, удар. В некоторых случаях возмущающие силы представляют случайный процесс.

В работе излагается аналитический метод определения собственных частот колебаний манипулятора параллельной структуры.

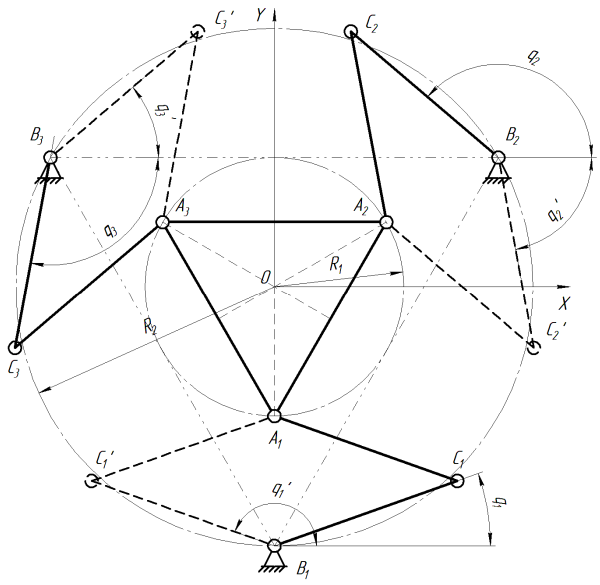

Рис. 1

Рассмотрен манипулятор параллельной структуры (рис. 1 – схема манипулятора) с тремя степенями свободы и с тремя кинематическими цепями [2], [3] Каждое входное звено цепи соединено с двигателем. Выходное звено представляет собой платформу, которая вращается вокруг оси z и движется в горизонтальной плоскости xoy. Входными координатами являются положения входных звеньев, описываемых углами q_1, q_2, q_3. Выходными координатами являются значения координат положения центра платформы $A_1A_2A_3$ (xn; yn) и угла поворота платформы вокруг этого центра φ. В данной работе решается задача построения алгоритма определения собственных частот манипулятора.

Зададим значения радиусов R_1=1 и R_2=2 окружностей, описанных соответственно вокруг треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$, а также значения длин звеньев $DL_1 = B_1C_1 = B_2C_2 = B_3C_3 = 1{,}5$ и $DL_2 = C_1A_1 = = C_2A_2 = C_3A_3 = 1{,}5$. Исходными данными являются положения входных или выходных звеньев манипулятора. Принимаем координаты точек A_0, A_1, A_2, A_3 подвижной платформы (0; 0), (0; −1), ($\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0,5), ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0,5), точек B_1, B_2, B_3 (0; −2), ($\sqrt{3}$; 1), ($-\sqrt{3}$; 1).

Для решения задачи определения собственных частот манипулятора необходимо найти кинетическую и потенциальную энергии механизма, а также выразить выходные скорости через обобщенные координаты.

Формой уравнений движения являются уравнения Лагранжа [4]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},$$

где q_i – обобщенные координаты; T – кинетическая энергия системы; $\dot{q}_i$ – обобщенные скорости; П – потенциальная энергия системы.

Потенциальная энергия системы определяется так:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2,$$

где c_i – жесткость цепи.

Кинетическая энергия является квадратичной функцией обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2,$$

где m – масса; $\dot{x}$, $\dot{y}$ – линейные скорости выходного звена; $\dot{\phi}$ – угловая скорость выходного звена; J – момент инерции выходного звена.

Уравнения движения манипулятора с тремя степенями свободы будет описываться системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_3}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_3} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_3}. \end{cases} \tag{1}$$

Выразим выходные скорости через обобщенные координаты:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{q}_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial x}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial x}{\partial q_3}, \\ \dot{y} &= \dot{q}_1 \frac{\partial y}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial y}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial y}{\partial q_3}, \\ \dot{\phi} &= \dot{q}_1 \frac{\partial \phi}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial \phi}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial \phi}{\partial q_3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Коэффициенты, стоящие при обобщенных скоростях, определяются из задачи о положениях. Рассмотрим положение манипулятора, когда точки C_1, C_2, C_3 имеют координаты: (1,413;-1,5), (0,592; 1,975); (-2,006; -0,474).

Выходные и входные скорости связаны между собой [5] соотношением:

$$A \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = (-B) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial \phi} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}$;

F_1, F_2, F_3 – неявные функции, связывающие обобщенные и абсолютные координаты.

Уравнение связей можно представить системой уравнений:

$$\begin{aligned} F_1 &= (x_{A1} - x_{B1} - DL_1 \cos q_1)^2 + (y_{A1} - y_{B1} - DL_1 \sin q_1)^2 = 0, \\ F_2 &= (x_{A2} - x_{B2} - DL_1 \cos q_2)^2 + (y_{A2} - y_{B2} - DL_1 \sin q_2)^2 = 0, \\ F_3 &= (x_{A2} - x_{B3} - DL_1 \cos q_3)^2 + (y_{A3} - y_{B3} - DL_1 \sin q_3)^2 = 0. \end{aligned}$$

Для исходного положения задачи матрицы A и B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} -2,828 & 1 & -2,828 \\ 0,548 & -2,95 & -2,829 \\ 2,282 & 1,949 & -2,829 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2,828 & 0 & 0 \\ 0 & -2,829 & 0 \\ 0 & 0 & -2,829 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Обратная матрица A^{-1} будет иметь вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,209 & 0,040 & 0,168 \\ 0,074 & -0,218 & 0,144 \\ -0,117 & -0,117 & -0,117 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Умножив левую и правую части уравнения (3) на матрицу A^{-1}, обратную матрице A, имеем:

$$A^{-1} A \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = A^{-1}(-B) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = A^{-1}(-B) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}.$$

С учетом (4) и (5) получаем:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,592 & -0,114 & -0,477 \\ -0,210 & 0,618 & -0,408 \\ 0,333 & 0,333 & 0,333 \end{pmatrix}.$$

Подставив в уравнение (2) коэффициенты, стоящие при обобщенных скоростях, определяем выходные скорости:

$$\dot{x} = \dot{q}_1 0,592 + \dot{q}_2(-0,114) + \dot{q}_3(-0,477),$$
$$\dot{y} = \dot{q}_1(-0,210) + \dot{q}_2 0,618 + \dot{q}_3(-0,408),$$
$$\dot{\phi} = \dot{q}_1 0,333 + \dot{q}_2 0,333 + \dot{q}_3 0,333.$$

Система дифференциальных уравнений (1) имеет частные решения:

$$q_1 = A_1 \sin\omega t,$$
$$q_2 = A_2 \sin\omega t,$$
$$q_3 = A_3 \sin\omega t.$$

Задав массу выходного звена $m = 0,5$ кг, момент инерции $J = 0,025$ кг·м^2, жесткость $c_1 = c_2 = c_3 = 1000$ кг·м/рад и подставив значения частных решений, а также их вторые производные в дифференциальные уравнения движения (1), после сокращения на множитель $\sin\omega t$ получаем:

$$\begin{cases} -A_1\left(1000 - 0,2\omega^2\right) - A_2 0,096\omega^2 - A_3 0,096\omega^2 = 0, \\ -A_1 0,096\omega^2 + A_2\left(1000 - 0,2\omega^2\right) - A_3 0,096\omega^2 = 0, \\ -A_1 0,096\omega^2 - A_2 0,096\omega^2 + A_3\left(1000 - 0,2\omega^2\right) = 0. \end{cases}$$

Движения $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ возможны только в том случае, если уравнения системы совместны друг с другом. Условием совместности уравнений является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов A_1, A_2, A_3. Составив и раскрыв этот определитель, получаем уравнение для определения частот возможных колебаний:

$$\begin{vmatrix} 1000 - 0,2\omega^2 & 0,096\omega^2 & 0,096\omega^2 \\ 0,096\omega^2 & 1000 - 0,2\omega^2 & -0,096\omega^2 \\ 0,096\omega^2 & 0,096\omega^2 & 1000 - 0,2\omega^2 \end{vmatrix} =$$
$$= -7 \cdot 10^{-4}\omega^6 + 92,3\omega^4 - 6 \cdot 10^5\omega^2 + 10^9.$$

Решение уравнения дает следующие значения круговых частот: $\omega_1 = 57,5$ рад/с, $\omega_2 = 58,8$ рад/с, $\omega_3 = 353$ рад/с, которым соответствуют собственные частоты колебаний $\nu_1 = 9,14$ Гц, $\nu_2 = 9,363$ Гц, $\nu_3 = 56,3$ Гц.

ВЫВОДЫ

1. Разработана методика расчета собственных частот манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы.
2. Выполнен численный пример расчета собственных частот колебаний манипулятора.
3. Полученные результаты предназначены для оценки виброустойчивости манипуляторов вблизи особых положений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Климов В.А., Гончаренко В.Н. , Ганулич А.А.* Робототехнические системы в текстильной и легкой промышленности. – М.: Легпромбытиздат, 1991.
2. *Ширинкин М.А., Глазунов В.А., Палочкин С.В.* Разработка манипуляционного механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2010, №1. С.102...107.
3. Патент на полезную модель № 88601 Российская Федерация / Глазунов В.А., Ширинкин М.А., Палочкин С.В.; Пространственный механизм

с четырьмя степенями свободы. –№ 2009121390/22, 20.11.2009; бюл. № 32.

4. *Биргер И.А., Пановко Я.Г.* Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. – Том.3. – М.: Машиностроение, 1968.

5. *Gosselin C.M., Angeles J.* Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. // IEEE. Transactions on Robotics and Automatics. – V. 6(3). June 1990. P.281...290.

Рекомендована кафедрой прикладной механики. Поступила 03.06.11.