УДК 677.024

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ К МОДЕЛИРОВАНИЮ НЕРОВНОТЫ ПРЯЖИ

APPLICATION OF THE STOCHASTIC FUNCTIONS THEORY TO THE MODELLING OF YARN ROUGHNESS

Л.А.СЕКОВАНОВА, Н.А. РЫБАКОВА
L.A. SEKOVANOVA, N.A. RYBAKOVA

(Костромской государственный технологический университет)
(Kostroma State Technological University)
E-mail: math@kstu.edu.ru

На основе теории случайных функций получены стохастические модели неровноты пряжи по толщине и разрывной нагрузке.

On the basis of the theory of stochastic functions stochastic models of yarn roughness by a thickness and breaking load are received herein.

Ключевые слова: неровнота пряжи, случайная функция, корреляционная функция, стационарность, белый шум, стохастическая модель.

Keywords: a yarn roughness, stochastic function, correlation function, stationarity, white noise, stochastic model.

Неровнота является одним из наиболее отрицательных свойств пряжи, влияющих не только на уровень обрывности, но и на внешний вид ткани. Изменение свойств пряжи по ее длине определяет неровноту по линейной плотности, по массе отрезков одинаковой длины, неровноту по прочности, растяжимости и т.д. Все эти величины, рассматриваемые в качестве параметров неровноты пряжи, имеют случайный характер. Например, толщина пряжи в произвольно выбранном сечении, разрывная нагрузка и разрывное удлинение отрезков нити единичной длины являются непрерывными случайными величинами, значения которых нельзя точно описать аналитическими выражениями. Для описания таких величин следует использовать случайные функции, то есть функции, где рассматриваемая величина меняется случайным образом при изменении неслучайного аргумента. Например, изменение диаметра поперечного сечения нити вдоль ее длины можно рассматривать как случайную функцию от непрерывно изменяющегося аргумента – длины нити. Если аргумент случайной функции изменяется дискретно, то соответствующие ему значения случайной функции образуют случайную последовательность. Например, рассматривая подряд идущие отрезки пряжи одинаковой длины, можно каждому отрезку с номером i поставить в соответствие значение разрывной нагрузки $P(i)$на этом отрезке, получив тем самым случайную функцию натурального аргумента, то есть случайную последовательность.

Для прогнозирования интенсивности разрушающих воздействий элементов оснастки на основные нити в процессе ткачества необходимо учитывать неровноту пряжи. В работе [1] нами была предложена стохастическая модель непрерывного изменения толщины пряжи на основе теории стохастических дифференциальных уравнений и использовании винеровского случайного процесса. При использовании этого метода для моделирования других случайных величин может получиться стохастическое дифференциальное уравнение, которое не имеет известного аналитического решения, а численное решение таких уравнений может давать значительную погрешность. Поэтому рассмотрим метод моделирования неровноты пряжи на основе теории случайных функций, который является более универсальным и простым при использовании. Суть данного метода рассмотрим на примерах моделирования прочности и толщины пряжи.

Исходными параметрами стохастической модели прочности нити являются средние выборочные характеристики, которые характеризуют средний уровень прочности и средний уровень ее рассеяния. Для получения этих характеристик на разрывной машине РМ-3 при зажимной длине 100 мм и скорости деформирования 150 мм/мин доведены до разрыва 100 расположенных друг за другом отрезков пряжи. Исследовалась хлопчатобумажная пряжа линейной плотностью 50 текс. Значение разрывной нагрузки на i -м отрезке принято за значение случайной последовательности $P(i)$, $i = 1,2,\dots,100$. Средняя разрывная нагрузка составила $\overline{P}$ =629,8 сН, среднеквадратическое отклонение $\sigma_P = 47{,}7$ сН. График первых двадцати полученных значений разрывной нагрузки представлен на рис. 1 (экспериментальные значения разрывной нагрузки).

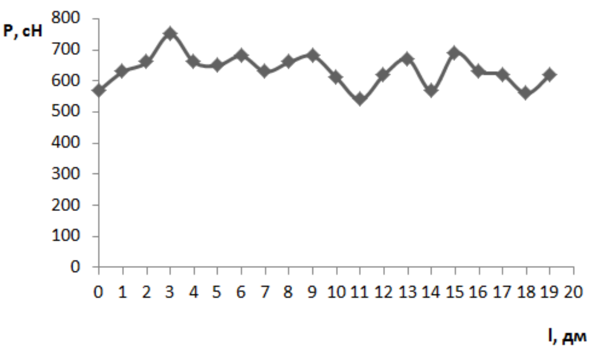

Рис. 1

Поскольку наиболее простыми для изучения и моделирования являются стационарные случайные функции, проведена проверка случайной функцию $P(\ell)$ на стационарность с помощью критерия серий. Для этого каждое значение $P(i)$ сравнивалось со средней разрывной нагрузкой $\overline{P}$. Если $P(i) \geq \overline{P}$, то оно было отнесено к категории, условно обозначаемой "+1". Если же $P(i) \leq \overline{P}$, то оно отнесено к другой категории, условно обозначаемой "-1". Например, значение $P(1) = 570$ сН относится к категории "-1", а $P(2) = 630$ сН – к категории "+1". В результате получена последовательность, состоящая из +1 или -1, по которой было определено количество групп подряд идущих одинаковых значений, то есть количество серий. В нашем случае количество серий равно 44. Для объема выборки $N = 100$ при уровне значимости $\propto = 0{,}05$ определены по таблицам критические значения $n_{1-\propto,\frac{N}{2}}$ и $n_{\propto,\frac{N}{2}}$, которые оказались равными соответственно 42 и 59. Поскольку подсчитанное количество серий лежит между критическими значениями, гипотеза о стационарности случайной функции $P(\ell)$ принимается на заданном уровне значимости. Стационарность случайной последовательности означает, что если сместить начало отсчета с $i = 1$ на $i = i_1$, где i_1 – произвольное натуральное число, то вероятностно-статистические характеристики последовательности (математическое ожидание, дисперсия и др.) не изменятся.

Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате эксперимента, называют реализацией случайной функции. Под сечением случайной функции понимают случайную величину, соответствующую фиксированному значению аргумента случайной функции.

Среднее значение и дисперсия не описывают связи между значениями случайной функции в различных сечениях. Изменение случайной величины не может происходить бесконечно быстро, поэтому значения случайной величины в близких сечениях могут оказаться взаимосвязанными. Связь между двумя сечениями t и $t + \tau$ случайной функции, разделенными некоторым интервалом длины τ, характеризуют корреляционная функция и нормированная корреляционная функция. Для стационарной случайной функции $X(t)$ корреляционная функция $K_X(\tau)$, по определению, равна математическому ожиданию произведения центрированных функций:

$$X^0(t) = X(t) - m_X(t)$$

и

$$X^0(t+\tau) = X(t+\tau) - m_X(t+\tau),$$

то есть

$$K_X(\tau) = M(X^0(t) \cdot X^0(t+\tau)),$$

где $m_X(t)$ – математическое ожидание функции $X(t)$ при значении аргумента t; $m_X(t+\tau)$ – математическое ожидание функции $X(t)$ при значении аргумента $t+\tau$; τ – сдвиг аргумента.

Нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции имеет вид:

$$\rho_X(\tau) = \frac{K_X(\tau)}{K_X(0)}, \qquad (1)$$

где $K_X(0)$ – значение корреляционной функции, соответствующее нулевому сдвигу аргумента, то есть дисперсия случайной функции $X(t)$.

Рассматривая $P(i)$ как стационарную случайную последовательность, найдем значения ее нормированной корреляционной функции $\rho_P(m)$, пользуясь известной формулой:

$$\rho_P(m) = \frac{1}{(N-m)\sigma_P^2} \sum_{k=1}^{N-m} \left((P(k) - \overline{P})(P(k+m) - \overline{P}) \right), \qquad (2)$$

где σ_P – среднеквадратическое отклонение разрывной нагрузки, сН; N – объем выборки; $\overline{P}$ – среднее значение разрывной нагрузки, сН; $P(k)$, $P(k+m)$ – элементы последовательности с номерами k и $k+m$ соответственно.

Значения функции $\rho_P(m)$ вычислялись для $m = 0,1,2,\ldots$ последовательно, вплоть до получения таких ее значений, при которых она становится практически равной нулю или начинает совершать небольшие нерегулярные колебания около нуля. График нормированной корреляционной функции $\rho_P(m)$, называемый коррелограммой, показан на рис. 2 (коррелограмма прочности нити).

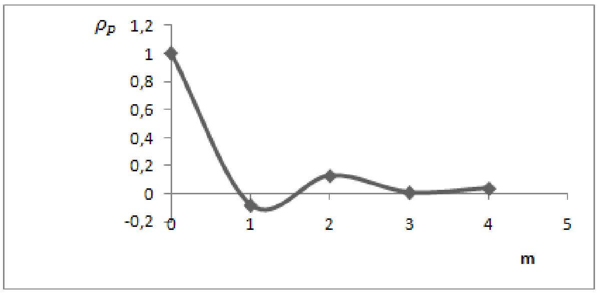

Рис. 2

Коррелограмма показывает, что функция $\rho_P(m)$ имеет острый пик в окрестности нуля, затем резко убывает до нулевого значения. Это означает, что нет зависимости между соседними сечениями случайной последовательности. В таких случаях ее можно описывать моделью белого шума, корреляционная функция которого равна $K_X(\tau) = S_0\delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака; S_0 – дисперсия белого шума [2].

Значения случайной функции типа белого шума $\widetilde{P}(i)$, распределенные по нормальному закону, можно получить с помощью известной процедуры генерирования нормально распределенной случайной величины с известными средним значением $\overline{P}$ и среднеквадратическим отклонением σ_P. Для получения значений $\widetilde{P}(i)$ необходимо получить возможные значения нормально распределенной нормированной случайной величины ε_i по формуле:

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{12} x_k - 6, \qquad (3)$$

где x_k – значения случайной величины с равномерной плотностью распределения вероятностей в интервале от 0 до 1. Тогда стохастическая модель прочности i-го единичного отрезка пряжи длиной 1 дм, примет вид:

$$\widetilde{P}(i) = \overline{P} + \sigma_P \varepsilon_i. \qquad (4)$$

График первых двадцати смоделированных значений разрывной нагрузки показан на рис. 3.

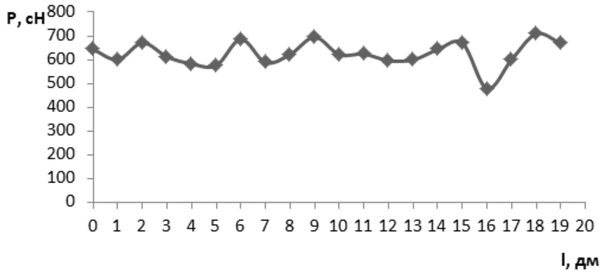

Рис. 3

Если бы расстояние τ между соседними сечениями случайной функции $P(\ell)$ было достаточно малым, например, меньше модальной длины волокна пряжи, то, вероятно, существовала бы зависимость между соседними сечениями случайной последовательности. В этом случае стохастическая модель прочности (4) имела бы совсем другой вид, как, например, в приведенном ниже случае.

Рассмотрим метод моделирования толщины нити $d(\ell)$ на основе теории случайных функций. Для определения средних выборочных характеристик толщины пряжи был проведен эксперимент с оческовой пряжей 86 текс. По отсканированному изображению пряжи в программе Adobe Photoshop инструментом "Линейка" была измерена толщина пряжи по ее длине с шагом Δ=5 мм. Таким образом, было получено 100 значений реализации случайной функции $d(\ell_i)$, где $\ell_i = \Delta(i-1), i = 1,2,\ldots,100$. Вычисленные несмещенные оценки генеральной средней и среднеквадратического отклонения оказались равными $\overline{d} = 0{,}264$ мм и $\sigma_d = 0{,}077$ мм соответственно. Для наглядности значения нескольких первых измерений толщины пряжи, соединенные плавной кривой, показаны на рис. 4.

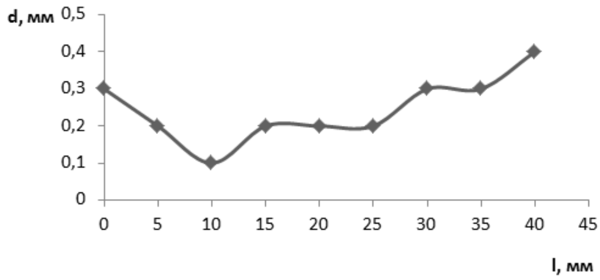

Рис. 4

По критерию согласия χ^2 - Пирсона при уровне значимости $\propto = 0{,}05$ была проведена проверка согласованности гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением выборки. Наблюдаемое значение критерия Пирсона оказалось равным $\chi^2_{\text{набл}} = 0{,}69$, а критическое $\chi^2_{\text{кр}} = 3{,}8$. Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, распределение экспериментальных данных согласуется с нормальным законом. Используя критерий серий, описанный выше, проверили экспериментальную реализацию $d(\ell_i)$, $i = 1,2,\ldots,100$ на стационарность. Гипотеза о стационарности случайной функции $d(\ell)$ толщины нити оказалась состоятельной.

Для исследования зависимости между соседними сечениями случайной функции $d(\ell)$ найдены значения нормированной корреляционной функции $\rho_d(c\Delta)$ по формуле, аналогичной формуле (2). Значения функции $\rho_d(c\Delta)$ вычислялись до тех значений $c = 0, 1, 2, \ldots$, при которых она становится почти равной нулю, то есть корреляционная связь пропадает. Эти значения, соединенные плавной кривой, показаны на рис. 5 (коррелограмма толщины нити).

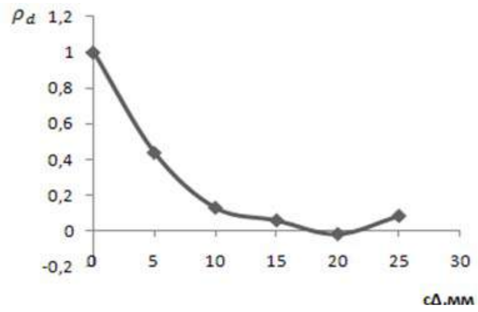

Рис. 5

Заметим, что значения нормированной корреляционной функции $\rho_d(c\Delta)$ толщины нити, в отличие от найденных ранее значений нормированной корреляционной функции прочности $\rho_P(m)$, медленнее убывают до нуля, что характеризует наличие связи между близкими сечениями случайной функции $d(\ell)$. В этом случае согласно [3] нужно знать вид и аналитическую форму записи нормированной корреляционной функции. Аппроксимируем найденные значения функции $\rho_d(c\Delta)$ функцией вида $\rho_d^*(\tau) = e^{-\propto\tau}$, где параметр $\propto$ подберем методом наименьших квадратов. В результате получим функцию $\rho_d^*(\tau) = e^{-0,168\tau}$.

Поскольку толщина нити – стационарная случайная функция, ее корреляционная функция $K_d(\tau)$ и нормированная корреляционная функция $\rho_d^*(\tau)$ связаны равенством, аналогичным равенству (1), то есть:

$$K_d(\tau) = \sigma_d^2\rho_d^*(\tau) = 0{,}077^2 e^{-0,168\tau}. \quad (5)$$

В [3] приведены алгоритмы моделирования гауссовой случайной функции с различными функциями корреляции. В частности, для случайной функции с экспоненциальной нормированной корреляционной функцией вида $R(\tau) = De^{-a\tau}$ алгоритм моделирования следующий. Вычислить $x_0 = \sqrt{D}\varepsilon$ и $k_2 = e^{-a}$. Затем определить $k_1 = \sqrt{D(1-k_2^2)}$. Тогда последовательность значений случайной функции для $n = 1, 2, \ldots$ вычисляется по рекуррентной формуле:

$$x_n = k_1\varepsilon_n + k_2 x_{n-1}, \quad (6)$$

где ε_n , ε – значения дискретного белого шума с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (3).

По изложенному выше алгоритму была смоделирована толщина нити $\tilde{d}(\ell_i)$ через каждые Δ=5 мм по формулам:

$$\tilde{d}(\ell_i) = \bar{d} + k_1\varepsilon_n + k_2\tilde{d}(\ell),$$
$$\tilde{d}(\ell_0) = \sigma_d\varepsilon,$$

где $\ell_i = 5(i-1)$; $\bar{d}$ – среднее значение толщины нити:

$$a = 0{,}168 \cdot \Delta = 0{,}168 \cdot 5 = 0{,}84,$$
$$k_2 = e^{-a} = e^{-0,84} = 0{,}432,$$
$$k_1 = \sqrt{\sigma_d^2(1-k_2^2)} = 0{,}077\sqrt{1-0{,}432^2} =$$
$$= 0{,}069; \quad i = 1,2,\ldots,100.$$

Исходными параметрами модели здесь являются дисперсия моделируемой функции $\sigma_d^2 = 0{,}077^2 = 0{,}006$ и параметр a, характеризующий статистическую связь соседних случайных сечений функции.

График первых десяти смоделированных значений толщины нити, соединенных плавной кривой, показан на рис. 6.

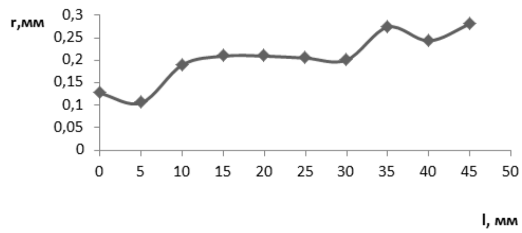

Рис. 6

ВЫВОДЫ

1. Разработан метод моделирования неровноты пряжи на основе теории стационарных случайных функций.
2. Исходными параметрами стохастической модели являются экспериментально полученные средние выборочные характеристики, характеризующие средний уровень значений исследуемого признака и средний уровень его рассеяния.
3. Полученные стохастические модели позволяют вычислять случайные значения разрывной нагрузки и диаметра поперечного сечении пряжи на единичном отрезке, расположенном по ее длине на любом расстоянии от начала отсчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Секованова Л.А., Рыбакова Н.А.* Стохастическое моделирование неровноты пряжи по толщине // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2010, №5. С.20...23.

2. *Прохоров С.А.* Математическое описание и моделирование случайных процессов: Учебное пособие. – Самара: Изд-во Самарского государственного аэрокосмического ун-та, 2001.

3. *Иванников Д.А.* , *Кашаев С.М., Шерстнева Л.В.* Моделирование случайных процессов: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во НГТУ, 2001.

Рекомендована кафедрой высшей математики. Поступила 03.06.11.