

УДК 677.023

**ИЗМЕНЕНИЕ НАТЯЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ НИТИ
ПРИ СМАТЫВАНИИ С ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КАТУШКИ
В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ**

**CHANGE OF VISCOELASTIC THREAD TENSION
WHEN REELING IT OFF A ROTATING BOBBIN
IN A TRANSIENT BEHAVIOUR**

П.Н. РУДОВСКИЙ, А.Б. ИШМАТОВ
P.N. RUDOVSKY, A.B. ISHMATOV

(Костромской государственной технологической университет,
Технологический университет Таджикистана)
(Kostroma State Technological University,
Technological University of Tajikistan)
E-mail: pavel_rudovsky@mail.ru; ishmat_0405@mail.ru

Разработана математическая модель изменения натяжения вязкоупругой нити при сматывании ее с вращающейся катушки в период пуска машины. Определены факторы, влияющие на неравномерность натяжения.

The mathematical model of changing the tension of viscoelastic thread while its reeling off a rotating bobbin in the period of machine starting has been developed. The factors influencing non-uniformity of tension have been determined.

Ключевые слова: вязкоупругая нить, натяжение, сматывание.

Keywords: a viscoelastic thread, tension, reeling off.

В [1] приведено решение задачи об изменении натяжения нити, сматываемой с вращающейся катушки, без учета вязких свойств самой нити и системы нитепроводников. Решение показало, что в этом случае в системе возникают незатухающие колебания, энергия на поддержание которых поступает от привода машины. На практике наблюдается затухание колебаний натяжения нити, поэтому представляется целесообразным решить задачу с учетом демпфирования в нити и системе нитепроводников.

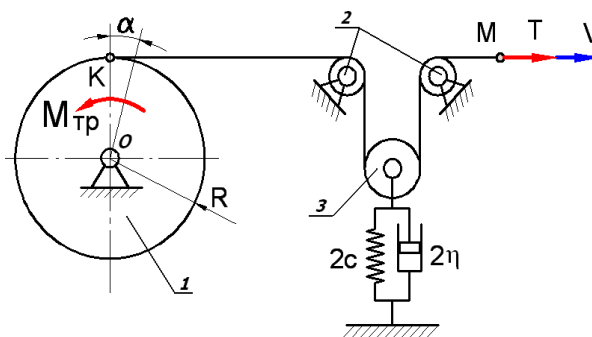


Рис. 1

Постановка задачи. Вязкоупругая нить намотана на катушку 1 радиуса R (рис. 1 – расчетная схема), которая может вращаться вокруг оси; при этом в опоре действует постоянный момент трения $M_{\text{ТР}}$. Конец заправлен на сновальный валик. Нить на своем пути огибает систему компенсатора натяжения, состоящую из двух неподвижных 2 и одного подвижного 3 роликов. На вертикальные перемещения подвижного ролика наложена связь, характеризующаяся коэффициентом вязкости 2η и коэффициентом жесткости $2c$. Не нарушая общности дальнейших рассуждений, можно считать, что эти величины характеризуют приведенные характеристики жесткости и вязкости нити и системы компенсатора.

В момент времени $t=0$ точка M на нити начинает двигаться ускоренно с ускорением a . В момент $t_2 = \frac{V}{a}$ скорость точки M становится равной V , то есть разгон машины прекращается. Дальнейшее движение точки M становится равномерным. Закон движения точки M показан в виде графика на рис. 2.

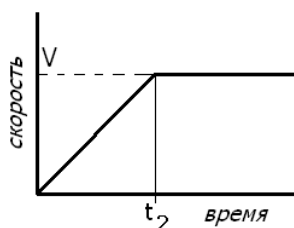


Рис. 2

По мере движения точки M натяжение нити изменяется. При этом можно выделить четыре этапа, описываемых разными дифференциальными уравнениями.

Этап I. Несмотря на рост натяжения по мере удаления точки M , выполняется соотношение:

$$M_{\text{ТР}} > RT. \quad (1)$$

Натяжение нити на этом этапе изменяется по закону:

$$T = \frac{at^2}{2}c + \eta at. \quad (2)$$

Поскольку катушка не вращается, то ее угол поворота и угловая скорость остаются равными нулю:

$$\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = 0. \quad (3)$$

Момент окончания этапа I можно определить из условия трогания катушки:

$$M_{\text{ТР}} = RT. \quad (4)$$

Подставляя в это выражение значение натяжения из (2), после очевидных преобразований получим:

$$t_1 = \frac{-\eta Ra + \sqrt{(\eta Ra)^2 + 2aRcM_{\text{ТР}}}}{aRc}. \quad (5)$$

Этап II. Точка M продолжает движение по закону $V = at$, при этом катушка движется под действием натяжения T , которое изменяется согласно зависимости:

$$T = c(at^2/2 - \alpha R) - \eta(\dot{\alpha}t - at). \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение движения катушки на этапе II:

$$J\ddot{\alpha} = TR - M_{\text{ТР}}, \quad (7)$$

где J – момент инерции массы катушки с намоткой.

Подставив в (7) значение натяжения из (6), получим:

$$\ddot{\alpha} + 2n\dot{\alpha} + k^2\alpha = \ell t^2 + mt - q, \quad (8)$$

где введены следующие обозначения:

$$\frac{R^2c}{J} = k^2, \quad -\frac{M_{\text{ТР}}}{J} = q, \quad \frac{R\eta a}{J} = m, \\ \frac{Rca}{2J} = \ell, \quad \frac{R^2\eta}{J} = 2n. \quad (9)$$

Решение этого уравнения согласно [2] имеет вид:

$$\alpha = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + At^2 + Bt + D. \quad (10)$$

Константы А, В и D частного решения

уравнения определяются по формулам:

$$D = q - \frac{2\ell}{k^4} - \frac{2nm}{k^4} + \frac{8n^2\ell}{k^6}, \quad A = \frac{\ell}{k^2}, \quad B = \frac{m}{k^2} - \frac{4n\ell}{k^4}. \quad (11)$$

Частота собственных колебаний обозначена:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (12)$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 определяются из начальных условий для этапа II. При $t = t_1$:

$$\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = 0. \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} e^{-nt} C_1 \cos k_1 t_1 + e^{-nt} C_2 \sin k_1 t_1 &= -(At_1^2 + Bt_1 + D), \\ e^{-nt} (k_1 \sin k_1 t_1 + n \cos k_1 t_1) C_1 + e^{-nt} (k_1 \cos k_1 t_1 - n \sin k_1 t_1) C_2 &= -(2At_1 + B). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Уравнение (10) для закона движения на втором этапе получено из предположения, что нить является удерживающей связью. Это не соответствует действительности. Поэтому в процессе расчетов должна проводиться проверка условия $T > 0$. В случае его нарушения происходит образование петли на нити, она не создает движущего момента для вращения катушки. В этом случае наступает IV этап движения системы. В том случае, если натяжение не па-

дает до нуля, продолжительность второго этапа определяется временем разгона машины и, как показано выше, в момент времени $t_2 = V/a$ наступает этап III.

Этап III. На этом этапе точка М движется с постоянной скоростью V . Этап начинается в момент времени $t_2 = V/a$.

Натяжение нити на этапе III изменяется по закону:

$$T = T_{II} + c[V(t - t_2) - R(\alpha - \alpha_{II})] - \eta [R(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_{II}) - V], \quad (15)$$

где T_{II} – натяжение нити на момент завершения этапа II; α_{II} , $\dot{\alpha}_{II}$ – угол поворота катушки и ее угловая скорость на момент завершения этапа II.

Дифференциальное уравнение движения катушки на этапе III имеет вид:

$$\ddot{\alpha} + 2n\dot{\alpha} + k^2\alpha = mt - \ell. \quad (16)$$

$$\alpha = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \frac{m}{k^2} t + \frac{\ell}{k^2} - \frac{2mn}{k^4}. \quad (18)$$

Начальные условия для этапа III при $t = t_2$:

$$\alpha = \alpha_{II}, \quad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_{II}. \quad (19)$$

В этом уравнении приняты следующие обозначения:

$$k^2 = \frac{R^2 c}{J}, \quad 2n = \frac{R^2 \eta}{J}, \quad m = \frac{RVc}{J}. \quad (17)$$

Общее решение уравнения движения катушки на этапе II:

Система уравнений для определения констант интегрирования на этапе III получается после подстановки значений угла α и его производной в (19):

$$\left. \begin{aligned} e^{-nt}C_1 \cos k_1 t_2 + e^{-nt}C_2 \sin k_1 t_2 &= \frac{2mn}{k^4} - \frac{\ell}{k^2} - \frac{m}{k^2} t_2 + \alpha_{II} t_2, \\ e^{-nt}(k_1 \sin k_1 t_2 + n \cos k_1 t_2)C_1 + e^{-nt}(k_1 \cos k_1 t_2 - n \sin k_1 t_2)C_2 &= -\frac{m}{k^2} + \alpha_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Этап II может прекратиться по двум причинам. Первая – это обрыв нити или останов машины. Вторая причина – снижение натяжения, определенного по формуле (15) после подстановки в нее угла α и его производной, ниже нуля. Это может произойти из-за того, что нить является неудерживающей связью. Фактически натяжение станет равным нулю, нить образует петлю, и катушка будет вращаться только под действием момента трения. Такое движение рассматривается как этап IV.

Этап IV. Дифференциальное уравнение движения катушки на этом этапе имеет вид:

$$J\ddot{\alpha} = -M_{TP}. \quad (21)$$

Этап IV завершается в момент выборки петли:

если $T < 0$ на этапе II, то

$$t_4 = \sqrt{\frac{2\alpha R}{a}} - t_1,$$

если $T < 0$ на этапе III, то

$$t_4 = \frac{\alpha R}{V} - t_2.$$

На рис. 3 представлены изменения натяжения нити и угловой скорости катушки в период пуска. Вертикальными линиями обозначены границы этапов. Из сравнения

Начальные условия в зависимости от того после какого этапа, II или III, наступает этап VI, будут иметь вид:

если после этапа II, то при $t = t_2$:

$$\alpha = \alpha_{II}, \quad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_{II}, \quad (22)$$

если после этапа III, то при $t = t_3$:

$$\alpha = \alpha_{III}, \quad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_{III}, \quad (23)$$

где $\alpha_{II}, \dot{\alpha}_{II}$ – угол поворота катушки и ее угловая скорость на момент завершения этапа II; $\alpha_{III}, \dot{\alpha}_{III}$ – угол поворота катушки и ее угловая скорость на момент завершения этапа III.

Общее решение уравнения движения катушки на этапе IV имеет вид:

$$\alpha = -\frac{M_{TP}}{2J} t^2 + \left(\dot{\alpha}_{III} + \frac{M_{TP}}{J} t_3\right) t + \alpha_{III} \frac{M_{TP}}{2J} t_3 + \dot{\alpha}_{III} t_3 + \frac{M_{TP}}{J} t_3^2. \quad (24)$$

графиков рис. 3-а и 3-б можно сделать ожидаемый вывод о том, что, увеличивая коэффициент демпфирования, можно за более короткое время погасить колебания натяжения. Сравнение графиков рис. 3-в и 3-г показывает, что за счет плавного пуска машины можно сократить амплитуду колебаний, при этом их продолжительность увеличивается. Снижение момента трения в опоре катушки позволяет уменьшить риск возникновения петли нити и последующих рывков натяжения.

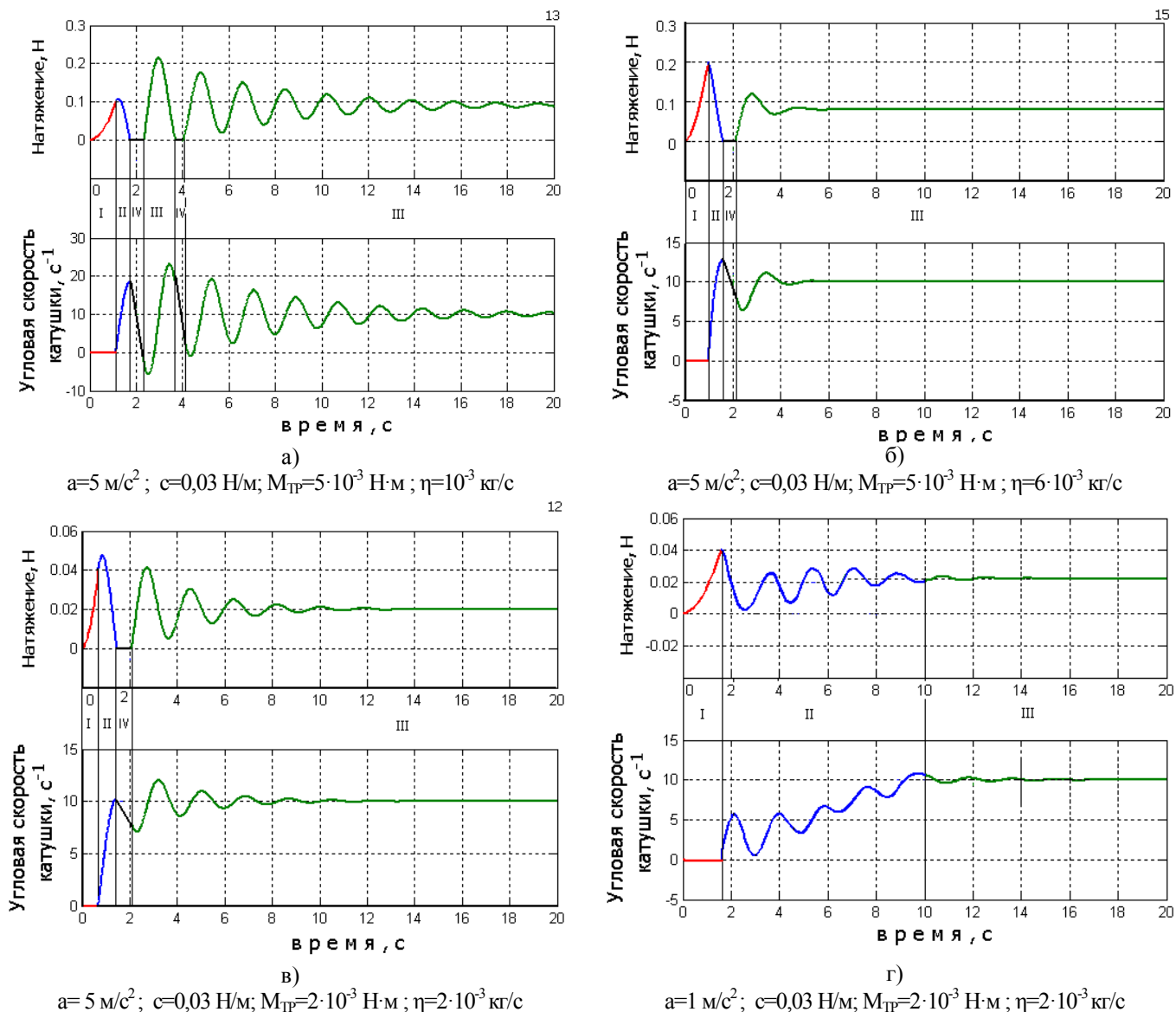


Рис. 3

ВЫВОДЫ

1. Показано, что в период пуска машины движение катушки, с которой сматывается вязкоупругая нить, можно представить в виде четырех этапов, описываемых разными дифференциальными уравнениями.

2. Решение уравнений движения позволило выделить основные факторы, влияющие на неравномерность натяжения нити, и предложить мероприятия по его снижению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудовский П.Н., Ишиматов А.Б. Изменение натяжения нити в период пуска при сматывании с вращающейся катушки // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2012, №4. .96...100.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1986.

Рекомендована кафедрой теоретической механики и сопротивления материалов КГТУ. Поступила 21.06.12.