

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАТЯЖЕНИЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЭЛАСТИЧНОЙ НИТИ

Ю. Д. РУМЯНЦЕВ, З. Л. СУХАНОВА, А. Н. ТИМОХИН

(Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина)

В процессе вязания трикотажного полотна на кругловязальной машине существенную роль играет поддержание минимального значения натяжения эластичной нити, подаваемой в зону петлеобразования. Нестабильность величины натяжения приводит к неисправимым дефектам готового полотна, поэтому целесообразно контролировать натяжение эластичной нити, пропустив ее через три вращающихся нитепроводника измерительного прибора, установленного до зоны вязания. Также необходимо качественно оценить зависимость силы, создаваемой нитью на чувствительном элементе датчика, от выходного натяжения нити.

До сих пор было изучено движение нити, проходящей через один нитепроводник с учетом ее растяжимости и силы трения с поверхностью нитепроводника [1]. Позже была предпринята попытка оценить погрешность измерения натяжения нити, вызываемую непостоянством сопротивления ее движению трех вращающихся нитепроводников [2]. Однако при этом не были учтены особые свойства эластичной нити.

Данная работа посвящена построению математической модели, описывающей характер изменения натяжения невесомой эластичной нити, движущейся с постоянной скоростью по трем вращающимся нитепроводникам с учетом силы трения.

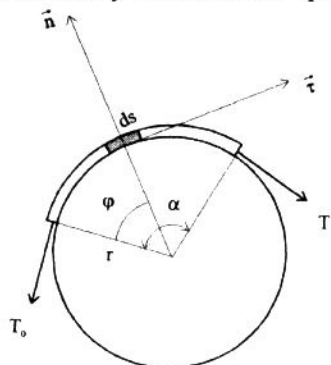


Рис. 1

Рассмотрим натяжение невесомой растяжимой нити, перекинутой через шероховатую поверхность цилиндрического нитепроводника. На рис. 1 представлена невесомая растяжимая нить, движущаяся по цилиндрическому нитепроводнику радиусом  $r$ , и ее основные параметры. Уравнения движения невесомой нити с учетом ее растяжимости и сцепления с шероховатой поверхностью нитепроводника согласно [1] выглядят следующим образом:

$$\frac{dT}{ds} - F_{\text{тр}} = \rho w_{\tau}, \quad (1)$$

$$\frac{T}{r} - N = \rho \frac{v^2}{r}. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) все силы приводятся в расчете на единицу длины нити. Уравнение (1) описывает движение нити в продольном (или тангенциальном) направлении  $\vec{\tau}$ , а уравнение (2) – в нормальном направлении  $\vec{n}$ . Здесь  $dT$  – сила натяжения нити на элементе ее длины  $ds$ ;  $\rho$  – масса единицы длины нити;  $w_{\tau}$  – ускорение нити в тангенциальном направлении;

$F_{\text{тр}} = k \frac{u}{u^*} N$  – сила трения покоя по закону

Амонтона–Кулона [1] при сцеплении нити с шероховатой поверхностью нитепроводника до наступления скольжения нити;  $k$  – коэффициент трения по Кулону;  $N$  – сила нормального давления нити на нитепроводник;  $u$  – упругое смещение нити до ее срыва (предварительное смещение);  $u^*$  – смещение в момент срыва, то есть в момент перехода упругого смещения в скольжение нити.



Рис. 2

Зависимость силы трения  $F_{тр}$  в законе Амонтона–Кулона от предварительного смещения  $u$  нити изображена на рис. 2.

Будем рассматривать наиболее интересное на практике стационарное движение нити, то есть без ускорения, когда  $w_t = 0$ . В случае движения исследуемой нами упругорастяжимой нити силой инерции в правой части уравнения (2) можно пренебречь. Действительно, если  $\rho \sim 1 \text{ мг/м} = 10^{-6} \text{ кг/м}$  [3], то при характерных натяжениях нити  $T \sim 1 \text{ сН} = 10^{-2} \text{ Н}$  [4],  $\rho \frac{v^2}{r} \ll \frac{T}{r}$  при скоростях движения нити  $v \ll \sqrt{\frac{T}{\rho}} \sim 100 \text{ м/с}$ , что всегда выполнимо.

При этом уравнения (1) и (2) могут быть переписаны в виде, исследованном ранее в [1] для описания равновесия невесомой растяжимой нити на шероховатой поверхности цилиндрического нитепроводника:

$$\frac{dT}{ds} - F_{тр} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{T}{r} - N = 0. \quad (4)$$

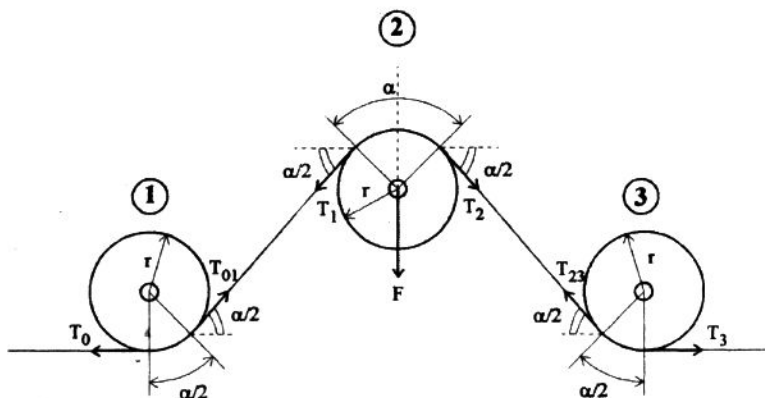


Рис. 3

Если связь между натяжением  $T$  и смещением  $u$  дается законом Гука:

$$T = \frac{ES}{r} \frac{du}{d\varphi}, \quad (5)$$

где  $E$  – модуль упругости нити;  $S$  – площадь поперечного сечения нити;  $ds = r d\varphi$  (рис. 1), то как следует из [1], в качестве решения системы уравнений (3) и (4) имеем:

$$T(\varphi) = T_0 \left\{ 1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{\frac{kr}{2u^*} \left( \frac{T_0}{ES} \right) \varphi^2} \right\}. \quad (6)$$

В (6) в аргументе тангенса  $\xi = \sqrt{\frac{kr}{2u^*} \left( \frac{T_0}{ES} \right) \varphi^2}$ ,  $u^* > r\alpha$  ( $\alpha$  – полный угол охвата нитью поверхности нитепроводника),  $\varphi \leq \alpha \sim \pi/2$ , поэтому

$$\xi < \left[ \left( \frac{k\alpha}{2} \right) \left( \frac{T_0}{ES} \right) \right]^{1/2} = \xi_{\max}.$$

Каждый из сомножителей в выражении для  $\xi_{\max}$  обычно много меньше единицы, поэтому и  $\xi \ll 1$ , а формула (6) принимает приближенный вид:

$$T \cong T_0 (1 + \xi^2) = T_0 \left( 1 + \frac{T_0}{T_*} \right), \quad (7)$$

где  $\xi^2 = T_0/T_*$ ,  $T_* = \frac{2u^*ES}{kr\varphi^2}$ .

Исследуем силу давления нити на ось центрального нитепроводника в системе, состоящей из трех нитепроводников. На рис. 3 показана схема распределения натяжений упругорастяжимой нити при ее движении по трем вращающимся цилиндрическим нитепроводникам

По формуле (7) распределение натяжений нити вдоль ее длины выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} T_{01} = T_0(1 + \xi_0^2), \\ T_1 = T_{01}, \\ T_2 = T_{01}(1 + \xi_{01}^2), \\ T_{23} = T_2, \\ T_3 = T_2(1 + \xi_2^2). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь

$$\xi_0^2 = \frac{T_0}{T_*} = \xi^2, \quad \xi_{01}^2 = \frac{T_{01}}{T_{*2}} \quad \text{и} \quad \xi_2^2 = \frac{T_2}{T_{*3}},$$

где для второго нитепроводника  $T_{*2}$  берется при  $\varphi = \alpha$ , а для первого и третьего нитепроводников  $\varphi = \alpha/2$  (рис. 3), поэтому  $T_* = T_{*3} = 4T_{*2}$ .

Тогда с учетом (8):

$$\xi_{01}^2 = \frac{T_0(1 + \xi^2)}{T_{*2}} = 4\xi^2(1 + \xi^2) \approx 4\xi^2,$$

аналогично:

$$\xi_2^2 = \frac{T_{01}(1 + \xi_{01}^2)}{T_{*3}} = \frac{\xi_{01}^2}{4}(1 + \xi_{01}^2) \approx \xi^2.$$

Иными словами, в главных членах разложения по параметру малости членах разложения в ряд можно считать

$$\xi_{01}^2 = 4\xi^2 \quad \text{и} \quad \xi_2^2 = \xi^2 = \xi_0^2. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) сила давления, оказываемая нитью на ось центрального нитепроводника, равна (рис. 3):

$$\begin{aligned} F &= (T_1 + T_2) \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= [T_{01} + T_{01}(1 + \xi_{01}^2)] \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= T_{01}(2 + \xi_{01}^2) \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= 2T_0(1 + \xi^2)(1 + 2\xi^2) \sin \frac{\alpha}{2} \cong \\ &\cong 2T_0 \sin \frac{\alpha}{2} (1 + 3\xi^2). \end{aligned}$$

Поскольку с учетом (8) и (9):

$$\begin{aligned} T_3 &= T_0(1 + \xi^2)(1 + \xi_{01}^2)(1 + \xi_2^2) = \\ &= T_0(1 + \xi^2)^2(1 + 4\xi^2) \cong T_0(1 + 6\xi^2), \end{aligned}$$

то сила  $F$  как функция натяжения нити  $T_3$  на выходе из системы нитепроводников может быть записана как

$$F = 2T_3 \sin \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{1 + 3\xi^2}{1 + 6\xi^2} \right].$$

Проводя разложение в ряд Тейлора по малому параметру  $\xi^2$ , получим

$$F \cong 2T_3 \sin \frac{\alpha}{2} (1 - 3\xi^2) = 2T_3 \sin \frac{\alpha}{2} \left( 1 - 3 \frac{T_0}{T_*} \right).$$

Принимая во внимание, что

$$T_3 \cong T_0(1 + 6\xi^2) = T_0 + 6 \frac{T_0^2}{T_*}$$

или

$$\frac{T_3}{T_*} = \frac{T_0}{T_*} + 6 \left( \frac{T_0}{T_*} \right)^2,$$

в главных членах разложения по параметру  $\xi^2$  окончательно находим функциональную зависимость:

$$F(T_3) \cong 2T_3 \sin \frac{\alpha}{2} \left( 1 - 3 \frac{T_3}{T_*} \right). \quad (10)$$

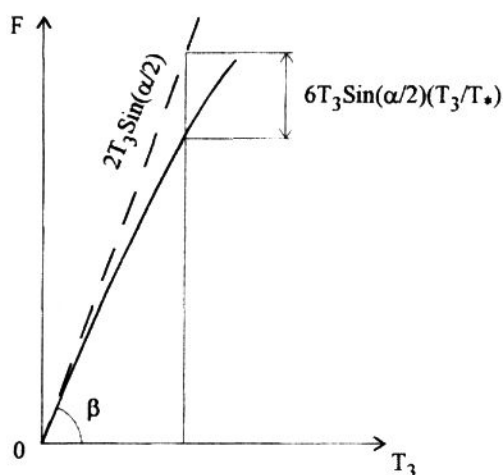


Рис. 4

Качественная оценка зависимости силы  $F$  на чувствительном элементе датчика от натяжения нити  $T_3$  показана на графике, изображенном на рис. 4, из которого следует, что по мере увеличения нагрузки  $T_3$  все более отчетливо прослеживается отклонение от линейной зависимости  $2T_3 \sin \frac{\alpha}{2}$ .

Нелинейные эффекты обусловлены как упругостью нити, так и ее сцеплением с поверхностями нитепроводников, то есть трением покоя. По тангенсу угла наклона прямой  $2T_3 \sin \frac{\alpha}{2}$  можно судить о величине угла  $\alpha$  охвата нитью поверхности центрального нитепроводника:  $\operatorname{tg} \beta = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$  (рис. 4).

Предложенная математическая модель получила свое подтверждение на практике. Был проведен ряд экспериментов для различных диапазонов натяжения эластичных нитей (10...100 гс, 50...500 гс, 100...1000 гс) и построена серия статических характеристик. При этом наблюдается систематиче-

ское отклонение от линейной зависимости конечных участков характеристик, которое при разных диапазонах натяжения нитей составляет от нескольких гс до нескольких десятков гс.

## ВЫВОДЫ

1. Построена математическая модель, позволяющая качественно оценить зависимость силы, создаваемой эластичной нитью на чувствительном элементе датчика центрального нитепроводника, от выходного натяжения нити в системе трех вращающихся нитепроводников.

2. Сила давления, оказываемая эластичной нитью на ось центрального нитепроводника, описывается нелинейной зависимостью от выходного натяжения нити, что необходимо учитывать при проектировании измерительного устройства. Отклонение от линейной зависимости объясняется как упругими свойствами нити, так и ее сцеплением с шероховатыми поверхностями нитепроводников.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Уразбаев М.Т. Основы механики весомой деформируемой гибкой нити. – Ташкент: Изд-во Академии Наук УзССР, 1951.
2. Вакс Е. Э. Измерение натяжения нитей. – М.: Легкая индустрия, 1966.
3. Шалов И. И., Кудрявин Л. А. Основы проектирования трикотажного производства с элементами САПР. – М.: Легпромбытиздат, 1989.
4. Петелин Д. П. и др. Автоматизация производственных процессов текстильной промышленности. Кн. 2. – М.: Легпромбытиздат, 1993.

Рекомендована кафедрой автоматики и промышленной электроники. Поступила 11.10.04.