УДК 66.047.76: 536.24

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СУШКИ ПОРИСТЫХ ТЕЛ*

И.П. КОРНЮХИН, Л.И. ЖМАКИН, Т.А. КОРНЮХИНА

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Настоящая статья продолжает работу [1], посвященную задаче получения системы дифференциальных уравнений тепломассообмена применительно к процессам сушки массивных пористых тел, то есть сушки в таких условиях, когда поля температур и влагосодержаний внутри материала уже нельзя считать однородными. Обозначения сохранены те же.

Уравнения неразрывности (15) и (16), уравнения движения для фаз (17) и (18), уравнение энергии (22) и конвективной диффузии для пара в газообразной фазе (23) из [1] представлены через осредненные значения параметров. Пульсации параметров обусловлены хаотичной структурой пористого тела. Операция осреднения параметров с учетом их пульсаций аналогична той, которая используется при получении уравнений турбулентного переноса Рейнольдса [2], [3].

В дальнейшем ограничимся рассмотрением тепломассообмена в тех режимах, когда можно пренебречь влиянием пульсаций, и определим условия, при которых возможен такой подход. Вследствие принятого предположения в указанных уравнениях средние значения произведений параметров можно рассматривать как произведения средних параметров и опустить знак осреднения.

Уравнения неразрывности для газообразной и жидкой фаз при этом запишутся как

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varepsilon(1-\theta)\varrho^{g}\right)=-\nabla\left(\tilde{\varepsilon}\left(1-\tilde{\theta}\right)(\varrho\,v)^{g}\right)+\varepsilon R^{v}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varepsilon\theta\varrho^{f}\right)=-\nabla\left(\tilde{\varepsilon}\tilde{\theta}(\varrho\,v)^{f}\right)-\varepsilon R^{v}, \quad (2)$$

а уравнение конвективной диффузии водяного пара и сухого воздуха – в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varepsilon(1-\theta)\chi\varrho^{v}\right)=$$
$$=-\nabla\left(\tilde{\varepsilon}\left(1-\tilde{\theta}\right)\left(\chi\varrho^{v}\,v^{g}-\varrho^{g}\tilde{D}\nabla\omega^{v}\right)\right)+\varepsilon R^{v}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varepsilon(1-\theta)(1-\chi)\varrho^{a}\right)=$$
$$=-\nabla\left(\tilde{\varepsilon}\left(1-\tilde{\theta}\right)\left((1-\chi)\varrho^{a}\,v^{g}-\varrho^{g}\tilde{D}\nabla\omega^{a}\right)\right), \quad (4)$$

---

* Продолжение. Начало см. в №6 за 2004 г.

где верхний индекс a относится к сухому воздуху. Между параметрами, входящими в два последние уравнения, существуют следующие связи:

$$\varrho^g = \varrho^v \chi + \varrho^a (1-\chi); \quad \omega^v + \omega^a = 1; \quad \omega^v = \frac{\varrho^v \chi}{\varrho^g}; \quad \omega^a = \frac{\varrho^a (1-\chi)}{\varrho^g}. \tag{5}$$

Учитывая эти связи, нетрудно заметить, что почленное суммирование уравнений (3) и (4) приводит к уравнению неразрывности (1) для газообразной фазы. Поэтому далее уравнение (4) не будет рассматриваться как независимое – оно будет использовано лишь при преобразованиях уравнения энергии.

В дальнейшем перейдем от средней скорости v движения фаз в капиллярах к скорости фильтрации w и переопределим коэффициент диффузии согласно уравнениям

$$\begin{aligned} w^f &= \tilde{\varepsilon}\tilde{\theta} v^f; \\ w^g &= \tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\theta}) v^g; \\ D &= \tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\theta})\tilde{D}. \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнение диффузии для пара (3) можно упростить при помощи уравнения неразрывности (1). Выполнив соответствующие преобразования с учетом связей, определенных в (5) и (6), получим

$$\varepsilon(1-\theta)\varrho^g \frac{\partial}{\partial \tau}\omega^v = -\varrho^g w_i^g \frac{\partial \omega^v}{\partial x_i} + \nabla\left(\varrho^g D \nabla \omega^v\right). \tag{7}$$

Опустим в уравнении энергии процедуру осреднения и преобразуем его при помощи уравнений (2)...(6). Приняв постоянными значения удельных массовых теплоемкостей фаз и компонентов парогазовой смеси, будем иметь

$$\varrho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\left(\varrho^f w_i^f + \varrho^g\left(\omega^v w_i^v + \omega^a w_i^a\right)\right)\frac{\partial t}{\partial x_i} - \varepsilon r R^v + \left(h^a - h^v\right)\nabla\left(\varrho^g D \nabla \omega^v\right) + \varepsilon(1-\theta)\frac{\partial p^g}{\partial \tau}, \tag{8}$$

где

$$\varrho c = (1-\varepsilon)(\varrho c)^s + \varepsilon\theta(\varrho c)^f + \varepsilon(1-\theta)\varrho^g\left((\omega c)^v + (\omega c)^a\right); \quad r = h^v - h^f .$$

В уравнении (8) слагаемое $-\varepsilon r R^v$ определяет затраты энергии на испарение влаги (r – удельная теплота фазового перехода, включающая энергию связи влаги с материалом). Плотности диффузионных потоков компонентов смеси – влажного воздуха равны по величине и противоположны по направлению, однако вследствие различия теплоемкостей, результирующий поток теплоты, переносимой диффузионным механизмом, не равен нулю. Его величина учитывается предпоследним слагаемым в правой части уравнения (8). Последнее слагаемое учитывает работу сжатия (расширения) газообразной фазы.

Преобразуем уравнения движения (17), (18) из [1] с учетом уравнений неразрывности (1), (2) и уравнений (5), (6) и определяющих вязкостное сопротивление уравнений (21) из [1]:

$$\varepsilon(1-\theta)\varrho^g \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{w_i^g}{\tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\theta})}\right) = -\varrho^g w_j^g \frac{\partial\left(\dfrac{w_i^g}{\tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\theta})}\right)}{\partial x_j} + \varepsilon R^v\left(\frac{w_i^f}{\tilde{\varepsilon}\tilde{\theta}} - \frac{w_i^g}{\tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\theta})}\right) - \tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\theta})\left(\frac{\partial p^g}{\partial x_i} + \frac{\Xi^g w_i^g}{\left(\tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\theta})\right)^2}\right), \tag{9}$$

$$\varepsilon\theta\varrho^f \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{w_i^f}{\tilde{\varepsilon}\tilde{\theta}}\right) = -\varrho^f w_j^f \frac{\partial\left(\dfrac{w_i^f}{\tilde{\varepsilon}\tilde{\theta}}\right)}{\partial x_j} + \varepsilon R^v\left(\frac{w_i^g}{\tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\theta})} - \frac{w_i^f}{\tilde{\varepsilon}\tilde{\theta}}\right) - \tilde{\varepsilon}\tilde{\theta}\left(\frac{\partial p^f}{\partial x_i} + \frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{\Xi^f w_i^f}{\left(\tilde{\varepsilon}\tilde{\theta}\right)^2}\right). \tag{10}$$

Полученная система уравнений может быть использована для описания тепломассообмена в изотропных и ортотропных пористых телах при условии введения в уравнения тензора проницаемости и зависящих от направления величин $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\theta}$. В изотропных пористых телах пористость совпадает с просветностью, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, как показано в [4] и [5] . Помимо этого для изотропных тел в [5] используется подход, согласно которому $\tilde{\theta} = \theta$. По-видимому, такой подход может рассматриваться как грубое приближение.

В ряде публикаций, например в [6], при решении задач теплообмена в пористых телах в качестве уравнения движения используется линейный закон Дарси, хотя и не приводится какого-либо обоснования такой постановки задачи. В общем случае в уравнении движения при осреднении нелинейных членов, характеризующих конвективный перенос импульса, возникают обусловленные пульсациями дополнительные слагаемые. Известно, что линейный закон справедлив при малых значениях числа Рейнольдса Re.

В литературе встречается два определения числа Рейнольдса для насыщенных пористых сред, т.е. при $\theta = 0$ или $\theta = 1$. Первое из них [5] базируется на использовании характерного размера, связанного с проницаемостью:

$$\mathrm{Re} = \frac{w\varrho}{\eta}\sqrt{\frac{K}{\varepsilon}},$$

а во втором в качестве определяющего размера используется средний размер зерен [7]:

$$\mathrm{Re} = \frac{w\varrho d}{\eta}.$$

В дальнейшем будем использовать первое из этих определений как более общее, не зависящее от структуры пористого тела. При увеличении числа Рейнольдса линейность закона фильтрации нарушается, и формула Дарси переходит в формулу Дюпюи-Форхгеймера [8], содержащую помимо линейного также и квадратичный по скорости фильтрации член.

Последнюю из них можно представить в форме [6], учитывающей направление скорости фильтрации:

$$\frac{K}{\eta}\nabla p = -\left(w + b\,w|w|\right), \qquad (11)$$

где b – постоянная, зависящая от структурных характеристик пористого тела.

Можно предположить, что появление квадратичного члена обусловлено осредненными пульсационными членами в уравнении движения. Во многих работах, в частности в [8] и [9], проявление нелинейности связывают с переходом к турбулентному режиму. Имеет право на существование и другая точка зрения на природу нелинейности: пульсации проявляются в ламинарном режиме и обусловлены они хаотической микроструктурой пористого тела.

Выполним некоторые оценочные расчеты для выяснения вопроса о характере движения жидкости в капиллярах. На основании анализа результатов опытов по течению жидкости в шероховатых трубах с песочной шероховатостью в [10] было установлено, что при турбулентном режиме течения существуют три области: ядро потока с развитыми турбулентными пульсациями, переходный слой, в котором затухают турбулентные пульсации, и ламинарный вязкостный подслой. При отсутствии турбулентного ядра в двух последних слоях характер течения будет ламинарным. Высота шероховатостей при этом не должна превышать суммарной толщины этих слоев, что в соответствии с результатами [10] можно записать как

$$k_s < 70\frac{\nu}{v_*}, \qquad (12)$$

где k_s – высота шероховатостей; ν – кинематическая вязкость; $v_* = \sqrt{\tau/\varrho}$ – динамическая скорость; τ – касательные напряжения трения.

В связи с изложенным соотношение (12) можно рассматривать как условие существования ламинарного режима течения в капиллярах. Используя уравнение связи между перепадом давления и касательным напряжением трения $\tau \approx R\Delta p/L$, оценку величины градиента давления по закону Дарси и определение динамической скорости, в результате простых преобразований получим условие существования ламинарного режима течения в форме

$$\mathrm{Re} < 4900\frac{K\sqrt{K}}{k_s^2 R}. \qquad (13)$$

Оценку величины проницаемости можно получить, используя решения [11], описывающие течения Пуазейля в цилиндрическом $(K = R^2/8)$ и плоском $(K = R^2/3,\ R$ – полуширина) каналах. Высота шероховатостей может быть принята по порядку величины, равной R. Таким образом, правая часть соотношения (13) близка к критическому значению числа Рейнольдса для труб $(\mathrm{Re}_{кр} = 2300)$. Следовательно, вязкостный режим течения, в том числе и ламинарный характер пульсаций, реализуются в достаточно широком интервале изменения чисел Рейнольдса.

Закон Дарси нарушается при значениях числа Рейнольдса, превышающих $\mathrm{Re} \approx 10^{-1}$, благодаря вкладу от пульсационных составляющих скорости и выражается в уравнении движения членами, аналогичными по форме турбулентным напряжениям. Поскольку эти слагаемые появляются в уравнении движения при осреднении нелинейных членов, то при меньших значениях Re влиянием пульсаций и нелинейных членов на закономерности движения и тепломассообмена можно пренебречь.

В кажущемся противоречии с этим утверждением находится основанное на учете пульсаций объяснение [5] дисперсии метки в пористом теле при значениях числа Рейнольдса вплоть до малых значений порядка 10^{-3}. Однако решение задачи [12] о дисперсии метки в цилиндрическом капилляре при ламинарном режиме течения снимает это противоречие. Механизм дисперсии связан с неоднородностью поля скоростей в капиллярах: в центральной части капилляра метка движется со скоростью, превышающей среднюю скорость движения потока.

Учесть влияние дисперсии на перенос массы и энергии в газообразной фазе можно в соответствии с подходом [13], вводя в закон диффузии Фика эффективный коэффициент диффузии, учитывающий как собственно диффузию, так и зависящую от скорости потока дисперсию. Применительно к рассматриваемому случаю эффективный коэффициент диффузии может быть представлен как

$$D_e = D\left(1 + \phi\frac{\left(w_i^g\right)^2 K}{D^2\left(\tilde{\varepsilon}\left(1-\tilde{\theta}\right)\right)^2}\right).$$

Формально влияние дисперсии можно учесть, вводя в уравнения (7) и (8) величину D_e вместо D. Остальные уравнения системы не изменяются.

Проведенный выше анализ позволяет пренебречь нелинейными инерционными членами в уравнениях движения при значениях $\mathrm{Re} < 0{,}1$. Заметим также, что в [14] и [15] подход, предполагающий линейную связь между скоростью и перепадом давления за счет трения, подтверждается экспериментально начиная с характеризующейся максимальной скоростью впитывания ранней стадии процесса. В этих работах так же, как и в рассматриваемом случае, движение жидкости обусловлено капиллярными силами, а нелинейность (переход к уравнению Форхгеймера (11)) проявляется в основном при продавливании жидкости через пористое тело внешними силами.

Оценим вклад в уравнение движения члена, характеризующего локальную силу инерции и равного по порядку величины $\varrho w/\tau$. Силу трения оцениваем в соответствии с законом Дарси как $w\eta/K$. В том случае, когда отношение этих сил $K/(\nu\tau)$ (ν – кинематическая вязкость) мало по сравнению с 1, вкладом указанного члена в уравнения движения можно пренебречь. Оценка времени из этого условия:

$$\tau >> \frac{K}{\nu}$$

показывает, что при реальных значениях проницаемости левой частью уравнений движения (9) и (10) можно пренебречь через доли секунды. Отметим, что аналогичный результат получен и в предыдущем параграфе при анализе закономерностей капиллярного впитывания. При этих условиях указанные уравнения можно рассматривать как квазистационарные, поскольку время не входит в них явным образом.

Учитывая обоснованные выше упрощения, нетрудно заметить, что уравнения движения фаз сводятся к модификации закона Дарси для случая совместного течения несмешивающихся жидкостей с добавлением слагаемого, описывающего обусловленный фазовыми переходами перенос импульса:

$$w_i^g = -\frac{K\psi^g(\theta)}{\eta^g}\frac{\partial p^g}{\partial x_i} + \varepsilon R^{\nu}\left(\frac{w_i^f\left(1-\tilde{\theta}\right)}{\tilde{\theta}} - w_i^g\right), \tag{14}$$

$$w_i^f = -\frac{K\psi^f(\theta)}{\eta^f}\left(\frac{\partial p^g}{\partial x_i} + \frac{\partial p_c}{\partial x_i}\right) + \varepsilon R^{\nu}\left(\frac{w_i^g\tilde{\theta}}{1-\tilde{\theta}} - w_i^f\right). \tag{15}$$

В представленных уравнениях учтены связи, определяемые формулами (20) и (21) из работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корнюхин И.П., Жмакин Л.И, Корнюхина Т.А.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2004, № 6, С.119...123.

2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978.

3. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. – М.: Энергия, 1975.

4. *Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Г. и др.* Механика насыщенных пористых сред. – М.: Недра, 1970.

5. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика. – М.: Недра, 1996.

6. *Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б.* Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. – Т.2. – М.: Мир, 1991.

7. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977.

8. *Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971.

9. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир,1964.

10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Инлитиздат, 1956.

11. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. – Ч.2. – М.: Физматгиз, 1963.

12. *Taylor G.I.* Proceeding Royal Society. – V. A223, №1137, 1954.

13. *Aris R.* Proceeding Royal Society. – V. A235, № 1200, 1956.

14. *Корнюхин И.П., Савельев А.А., Корнюхин Д.И.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1997, №2. С.112...116.

15. *Корнюхин И.П., Савельев А.А., Корнюхин Д.И.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1997, №3, С.99...103.

Рекомендована кафедрой промышленной теплоэнергетики. Поступила 05.02.04.