

УДК 677.052.94

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
УТОНЕНИЯ ВОЛОКНИСТОГО МАТЕРИАЛА  
НА ПРЯДИЛЬНЫХ МАШИНАХ**

*В.А. АВРЕЛЬКИН, Г.И. ЧИСТОБОРОДОВ, А.Б. СКОРОБОГАТОВ*

*(Ивановская государственная текстильная академия)*

Несмотря на всесторонние исследования процесса вытягивания, до сих пор не создана математическая модель, которая охватывала бы все основные параметры процесса. Причина, видимо, в том, что класс математических моделей не позволяет объединить вероятностно-динамическую схему движения волокон с учетом их взаимодействия, а также формы и физико-механических свойств и схему взаимодействия множества волокон в продукте с органами вытяжного прибора с учетом динамики их работы.

Задачи, связанные с проблемами ликвидации неровноты в процессе вытягивания, постоянно рассматриваются в научно-иссле-

довательской литературе и представлены достаточно широко, в частности в [1].

Задача настоящего исследования заключается в получении математического аппарата для создания имитационной модели, необходимой для анализа эффективности процесса вытягивания на прядильных машинах при различных параметрах и факторах, влияющих на формирование волокнистого продукта. С помощью полученного математического аппарата планируется дальнейшая разработка программного обеспечения.

В [1] математическая модель процесса утонения продукта в вытяжном приборе представлена в виде:

$$n_2(t) = \frac{1}{E} \int_0^{R\infty} \int_0^\infty \varphi(x, \ell) f(\ell) n_1 \left( t - \frac{x}{V_1} - \frac{R-x}{V_2} \right) dx d\ell, \quad (1)$$

где  $E$  – вытяжка в зоне вытягивания;  $R$  – разводка в зоне вытягивания;  $\varphi(x, \ell)$  – плотность вероятности координаты  $x$  переднего конца волокна длиной  $\ell$  в момент изменения его скорости с  $V_1$  на  $V_2$ ;  $f(\ell)$  – дифференциальный закон распределения волокон по длине;  $V_1$  и  $V_2$  – скорости вращения соответственно питающей и вытягивающей пар;  $t$  – момент времени;  $n_2(t)$  – число волокон продукта, выходящего из вытяжного прибора;  $n_1(t)$  – число волокон продукта, входящего в вытяжной прибор.

В ходе исследований в качестве оценки эффективности процесса вытягивания использовали передаточную функцию вытяжного прибора. В проведенной авторами работе анализ эффективности процесса вытягивания осуществлялся для определенных ранее [2] предельных схем вытягивания. Известно, что в реальности волокна переходят на скорость выпускной пары на некотором расстоянии.

Момент перехода волокон на скорость выпускной пары зависит от многих пара-

метров процесса вытягивания, которые были исследованы нами ранее в [3], [4]. На базе полученных результатов найдем математическую модель (передаточная функция) процесса вытягивания при реальных условиях перехода волокон на ско-

рость вытягивающей пары для прядильной машины П-76-ШГ2.

Для исследуемого вытяжного прибора прядильной машины были установлены заправочные параметры, которые представлены в табл. 1.

Таблица 1

Состав перерабатываемой смеси полуфабриката прядения	Разводка в зоне, мм		Вытяжка		Нагрузка на нажимной валик пары, сН		
	задняя	передняя	задняя	передняя	питающей	промежуточной	выпускной
Ровница $\Gamma = 0,3$ ктекс шерсть 70 <sup>к</sup> , Г длины – 35%, искусственное волокно (лавсан) – 65%; штапельная длина волокон равна 74,2 мм	85	115	1,9	9,5	7190	9070	11520

Первоначальной целью исследования является получение общего вида передаточной функции процесса утонения волокнистого продукта в вытяжном приборе.

В ходе математических преобразований были выполнены следующие операции [5]:

- от исследуемых функций перейти к некоторым их изображениям (преобразование Лапласа);

- над изображением произвести необходимые операции;

- получив некоторый результат при действии над изображениями, перейти к оригиналу (обращение Римана-Меллина).

Преобразуем формулу (1), для чего воспользуемся преобразованием Лапласа. Преобразование Лапласа имеет вид:

$$N(p) = \int_0^{\infty} n(t)e^{-tp} dt. \quad (2)$$

Такое преобразование для функции  $n_1(t)$ , зависящей от переменной  $t$ , ставит во взаимнооднозначное соответствие функцию  $N_1(p)$  от переменной  $p$ .

Операция дифференцирования по переменной  $t$  и умножения на функцию  $e^{\lambda t}$  для прообразов (функций вида  $n_1(t)$ ) производится по более простым формулам. Осуществление этих операций приведет к результатам, которые с помощью обратного преобразования приведут к функции оригиналу от переменной  $t$ :

$$n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} N(p)e^{pt} dp, \quad (3)$$

где  $c$  – такое действительное число, при котором особенности функции  $N(p)$  расположены слева от вертикали  $p=c$ ;  $i$  – мнимая единица.

Поскольку по условиям  $n_2(t)$  принимает ненулевые значения с некоторого момента

$$t = \frac{x}{V_1} + \frac{R-x}{V_2},$$

а также поскольку все волокна имеют разную длину, то  $n_1(t)$  от  $t=0$

$$\text{до } t = \frac{x}{V_1} + \frac{R-x}{V_2} \text{ рассматриваем как функцию с запаздыванием :}$$

функцию с запаздыванием :

$$\int_0^{\infty} n_1(t)e^{-tp + \frac{xp}{V_1} + \frac{R-x}{V_2}p} dt e^{-\frac{xp}{V_1} - \frac{R-x}{V_2}p} = e^{-\frac{pR}{V_2}} e^{-\frac{x}{V_2}E + \frac{x}{V_2}p} N_1(p), \quad (4)$$

где  $e^{\frac{xp}{V_1} - \frac{R-x}{V_2} p}$  – компенсация запаздывания.

Откуда получим:

$$N_1(p) = \int_0^{\infty} n_1(t) e^{-tp + \frac{xp}{V_1} - \frac{R-x}{V_2} p} dt. \quad (5)$$

Далее произведем преобразование формулы (1) по Лапласу:

$$\begin{aligned} N_2(p) &= \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{E} \int_0^R \int_0^{\infty} \varphi(x, \ell) f(\ell) n_1(t) e^{-tp + \frac{xp}{V_1} - \frac{R-x}{V_2} p} dx d\ell \right) dp = \\ &= \frac{1}{E} \int_0^R \int_0^{\infty} \varphi(x, \ell) f(\ell) e^{-\frac{xp}{V_1} + \frac{R}{V_2} p + \frac{x}{V_2} p} \left( \int_0^{\infty} n_1(t) e^{-tp + \frac{xp}{V_1} - \frac{R-x}{V_2} p} dt \right) dx d\ell = \\ &= \frac{e^{-\frac{Rp}{V_1}}}{E} \int_0^R \int_0^{\infty} \varphi(x, \ell) f(\ell) e^{-p \frac{x}{V_2} (E-1)} N_1(p) dx d\ell. \end{aligned}$$

В результате получим:

$$W(p) = \frac{e^{-\frac{Rp}{V_1}}}{E} \int_0^R \int_0^{\infty} \varphi(x, \ell) f(\ell) e^{-p \frac{x}{V_2} (E-1)} dx d\ell = \frac{e^{-\frac{Rp}{V_1}}}{E} \int_0^R \Phi(x, \ell) d\ell = \frac{e^{-\frac{Rp}{V_1}}}{E} M \Phi(x, \ell). \quad (6)$$

Как видим, передаточная функция вытяжного прибора зависит от функции распределения волокон по длинам ( $f(\ell)$ ), динамики перехода волокон со скорости питающей пары на скорость выпускной ( $\varphi(x, \ell)$ ), а также от заправочных параметров вытяжного прибора (вытяжки  $E$ , разводки  $R$ , нагрузок на валики, системы уплотнения).

Аппроксимируем кривую распределения волокон по длинам известными функциональными зависимостями. Определим распределение  $f(\ell)$  с носителем на компакте с учетом экспериментальных данных (табл.2).

Мерой близости распределения и статистических данных выберем как  $\min \chi^2$ .

Средняя длина волокна $\ell$ , мм	Масса группы волокон $m_i$ , мг	Частоты	Мера Пирсона
64	1,4	0,0158	0,4767
66	1,8	0,0203	0,1283
68	2,1	0,0237	0,1219
70	2,3	0,0259	0,3601
72	2,5	0,0282	0,7660
74	3,1	0,0350	0,2267
76	3,6	0,0406	0,1032
78	4,7	0,0531	0,5154
80	5,1	0,0576	0,3975
82	5,7	0,0644	0,7296
84	5,9	0,0666	0,3278
86	6,0	0,0677	0,0681
88	6,1	0,0689	0,0068
90	6,2	0,0700	0,0044
92	5,9	0,0666	0,0679
94	5,4	0,0610	0,3826
96	5,2	0,0587	0,1032
98	4,5	0,0508	0,1713
100	3,9	0,0440	0,0043
102	3,2	0,0361	0,2016
104	2,1	0,0237	0,1547
106	1,1	0,0124	0,0077
108	0,6	0,0067	1,6081
110	0,1	0,0011	1,1119
	$\Sigma$		8,0481

Следовательно, получим [6]:

$$\chi^2(\alpha, \beta, m) = \sum_{n=1}^m \frac{(v_i - np_i(\alpha, \beta, m))^2}{np_i(\alpha, \beta, m)}, \quad (7)$$

где  $p_i(\alpha, \beta, m) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\alpha, \beta, \gamma, \ell) d\ell$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  – параметры распределения.

Более того, функция  $f(\alpha, \beta, \gamma, \ell)$  должна быть удобно интегрируемой.

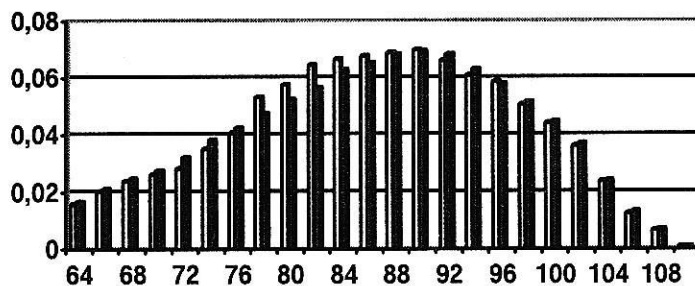


Рис. 1

Выразим искомую функцию  $f(\ell)$  гаммой-распределения:

$$f(\ell) = m \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} (110 - \ell)^{\eta-1} e^{-\lambda(110-\ell)} \text{Ind}_{(110>\ell>64)}(\ell), \quad (8)$$

где  $\Gamma(\eta) = \int x^{\eta-1} e^{-x} dx$ .

После обработки данных, представленных в табл. 2 и на рис.1 (диаграмма рас-

пределения волокон по длинам), получим что  $\lambda = 3,7589$  и  $\eta = 4$ :

$$f(\ell) = m \frac{3,7589^4}{\Gamma(4)} (110 - \ell)^3 e^{-\lambda(110-\ell)} \text{Ind}_{(110>\ell>64)}(\ell). \quad (9)$$

Из всех исследуемых функций (нормальное, Вейбулла, логнормальное и т.д.) полученное гамма-распределение имеет наилучшую сходимость с экспериментальными данными.

Далее определим функцию  $\varphi(x, \ell)$  для задней зоны исследуемого вытяжного прибора. Волокна переходят на скорость вытягивающей пары не в жале, а на расстоянии от него и не в одной точке, а в пределах некоторого интервала. Это происходит, как известно, вследствие того, что во-

локна имеют разную длину. Волокно перейдет на скорость вытягивающей пары в тот момент, когда работа, совершаемая ею, будет больше работы, совершаемой питающей парой.

После проведения расчетов, представленных в [3] и [4], получим, что для задней зоны вытягивания плотность вероятности распределения перехода волокон со скорости питающей пары на скорость вытягивающей выглядит так:

$$\varphi_1(x, \ell) = \frac{\lambda_1^{\eta_1}}{\Gamma(\eta_1)} e^{-\lambda_1(x-\ell-s)} (x - \ell - s)^{\eta_1-1}, \quad (10)$$

где  $\lambda_1, \eta_1$  – параметры функции;  $s$  – расстояние от вертикальной оси питающей пары до первой точки где происходит изменение скорости волокна;  $\ell$  – длина волокна.

Далее осуществим преобразование Лапласа:

$$\Phi(x, \ell) = \int_0^{\infty} e^{-xz} \varphi(x, \ell) dx, \quad (11)$$

$$e^{-xz} = e^{-(x-\ell-s)z - \ell z - sz}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, \ell) &= \int_s^{\infty} \frac{\lambda_1^{\eta_1}}{\Gamma(\eta_1)} (x - \ell - s)^{\eta_1-1} e^{-(x-\ell-s)(\lambda_1+z)} dx e^{-(\ell+s)z} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda_1^{\eta_1}}{\Gamma(\eta_1)} e^{-(\ell+s)z} (x - \ell)^{\eta_1-1} e^{-(x-\ell)(\lambda_1+z)} dx = \\ &= \frac{\lambda_1^{\eta_1}}{\Gamma(\eta_1)} e^{-(\ell+s)z} \int_0^{\infty} \frac{(x - \ell)^{\eta_1-1} (\lambda_1 + z)^{\eta_1-1}}{(\lambda_1 + z)^{\eta_1}} e^{-(x-\ell)(\lambda_1+z)} d(x - \ell) (\lambda_1 + z) = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + z} \right)^{\eta_1} e^{-(\ell+s)z}. \quad (12) \end{aligned}$$

Теперь вычислим математическое ожидание:

$$\begin{aligned} \text{МФ}(x, \ell) &= \int_0^{\infty} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + z} \right)^{\eta} e^{-(\ell+s)z} m \frac{\lambda^{\eta}}{\Gamma(\eta)} (110 - \ell)^{\eta-1} e^{-\lambda(110-\ell)} \text{Ind}_{(110>\ell>64)}(\ell) d\ell = \\ &= \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + z} \right)^{\eta} e^{-sz} m \frac{\lambda^4}{\Gamma(\eta)} \int_{64}^{110} (110 - \ell)^3 e^{-\lambda(110-\ell)} e^{-\ell z} d\ell. \end{aligned}$$

После преобразования получим передаточную функцию процесса вытягивания в

задней зоне вытяжного прибора:

$$W_1(p) = \frac{e^{-\frac{Rp}{V_1}}}{E} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + z} \right)^{\eta} e^{-sz} m \frac{\lambda^4}{\Gamma(\eta)} \times$$

$$\left[ e^{-4\epsilon \left( \lambda - \frac{p(E-1)R}{V_2} \right)} \left( \frac{1}{\exp \left( -4\epsilon \left( \lambda - \frac{p(E-1)R}{V_2} \right) \right)} - 4\epsilon \left( \lambda - \frac{p(E-1)R}{V_2} \right) - 529 \left( \lambda - \frac{p(E-1)R}{V_2} \right)^2 - 16222 \left( \lambda - \frac{p(E-1)R}{V_2} \right)^3 - 1 \right) \right] \times \left( \lambda - \frac{p(E-1)R}{V_2} \right)^4$$

## ВЫВОДЫ

В ходе проведенных исследований получена передаточная функция процесса утонения волокнистого продукта в задней зоне вытяжного прибора при реальных условиях протекания процесса вытягивания (фактической области перехода волокон со скорости питающей на скорость вытягивающей пары в зоне вытяжного прибора, функции распределения волокон по длинам, разводки, вытяжки, нагрузки на нажимные валики и системы уплотнения волокнистого продукта).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Севостьянов А.Г., Севостьянов П.А. Моделирование технологических процессов. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.

2. Зотиков В.Е., Будников И.В. Основы прядения волокнистых материалов. – М.: Гизлегпром, 1959.

3. Роньжсин В.И., Аврелькин В.А., Чистобородов И.Г., Лапшин В.Г. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №1. С.35...38.

4. Роньжсин В.И., Аврелькин В.А., Чистобородов И.Г., Лапшин В.Г. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №2. С.34...38.

5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2004.

6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2003.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 20.01.05.