

УДК 667.024.3

КОЛЕБАНИЯ НИТЕЙ ОСНОВЫ В ФАЗЕ ЗАСТУПА*

С.Г. СТЕПАНОВ, О.С. СТЕПАНОВ

**(Ивановская государственная архитектурно-строительная академия,
Ивановский государственный университет)**

При закрытом виде зева все нити основы в фазе заступа приходят на средний уровень и находятся под действием запорочного (начального) натяжения. Поскольку глазки галев, имеющие продольные от-

верстия, не препятствуют движению нити, то последняя в этот момент совершает свободные колебания. Допускаем, что эти колебания происходят только в вертикальной плоскости и являются малыми.

* В порядке обсуждения.

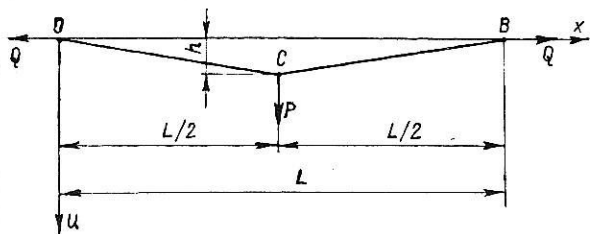


Рис. 1

Рассмотрим рис.1. В начальный момент времени нить занимает положение ОВС; Q – натяжение нити; P – сила тяжести ламели; h – величина прогиба нити; О – опущка ткани; В – точка касания нитью скала; L – длина нити.

При решении задачи силы трения нити о воздух и силу тяжести ламели учитывать не будем. Предположим, что в произвольный момент времени t нить займет положение, показанное на рис.2, где α и $(\alpha + \Delta\alpha)$ – углы с осью x касательных к нити в точках А и D.

Положение каждой точки нити в выбранной системе координат определяется двумя переменными x и t. Допуская, что любая точка оси нити движется параллельно оси ординат, и проецируя все силы на эту ось, получим для отрезка нити $AD \approx \Delta x$ следующее равенство:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = Q \sin(\alpha + \Delta\alpha) - Q \sin \alpha, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} Q \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] &= Q [(x + \Delta x) - x] \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \\ &= Q \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляем (5) в (4):

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = Q \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x. \quad (6)$$

Сокращая на Δx , записываем (6) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7)$$

где $a^2 = \frac{Q}{\rho}$.

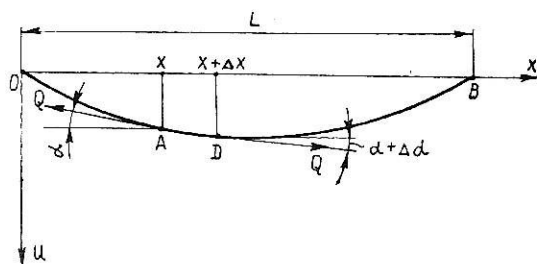


Рис. 2

где ρ – масса единицы длины нити (линейная плотность).

При малых отклонениях нити можно принять [1]:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha. \quad (2)$$

С учетом (2) уравнение (1) будет:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = Q \operatorname{tg}(\alpha + \Delta\alpha) - Q \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Или

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = Q \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]. \quad (4)$$

Используя теорему Лагранжа [1] для выражения, стоящего в квадратных скобках, запишем

Равенство (7) представляет собой известное волновое уравнение колебания струны [1]. Следовательно, свободные колебания нити на ткацком станке подчиняются тем же законам, что и колебания струны, закрепленной в двух точках и имеющей определенное натяжение.

Решение (7) осуществляем с учетом краевых:

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=L} = 0, \quad t \geq 0 \quad (8)$$

и начальных условий:

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < \ell. \quad (9)$$

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n a t}{L} + b_n \sin \frac{\pi n a t}{L} \right) \sin \frac{\pi n x}{L}. \quad (10)$$

Для решения (10) необходимо подобрать коэффициенты a_n и b_n таким образом, чтобы функция $U(x, t)$ удовлетворяла условиям (8) и (9).

Для того, чтобы учесть второе условие,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{L_n} \left[-a_n \sin \frac{\pi n a t}{L} + b_n \cos \frac{\pi n a t}{L} \right] \sin \frac{\pi n x}{L}. \quad (12)$$

При $t_0 = 0$ имеем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{L} b_n \sin \frac{\pi n x}{L} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (13)$$

Равенства (11) и (13) представляют собой разложения заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды Фурье. Тогда для вычисления коэффициентов a_n и b_n приведем формулы [2]:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx, \quad (14)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx. \quad (15)$$

Учитывая (14) и (16):

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{4h}{L^2} \int_0^{L/2} x \sin \frac{\pi n x}{L} dx + \frac{4h}{L^2} \int_{L/2}^L (L-x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx. \quad (17)$$

Или

Первое условие соответствует нулевому перемещению концов нити, второе – начальному положению нити и скорости движения ее отдельных элементов.

Известно, что решение (7) может быть осуществлено в двух вариантах: по формуле Даламбера или методом Фурье [2]. В последнем случае имеем:

Для первого условия из (10) при $t=0$:

$$U|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{L} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (11)$$

продифференцируем (10) по времени:

Определим функцию $\varphi(x)$, используя рис.1. Координаты точек: $O(0;0)$, $C(L/2;h)$, $B(L;0)$.

Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки, запишем

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L} x, & \text{если } 0 \leq x \leq L/2, \\ \frac{2h}{L} (L-x), & \text{если } L/2 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (16)$$

$$a_n = \frac{4h}{L^2} \left[\int_0^{L/2} x \sin \frac{\pi n x}{L} dx + L \int_{L/2}^L \sin \frac{\pi n x}{L} dx - \int_{L/2}^L x \sin \frac{\pi n x}{L} dx \right]. \quad (18)$$

Вычисляем интегралы:

$$\int_0^{L/2} x \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{hL}{\pi n} \left(\frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} - \cos \frac{\pi n}{2} \right), \quad (19)$$

$$L \int_{L/2}^L \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{L^2}{\pi n} \left(\cos \pi n - \cos \frac{\pi n}{2} \right), \quad (20)$$

$$\int_{L/2}^L x \sin \frac{\pi n x}{L} dx = -\frac{L^2}{\pi n} \left(\cos \pi n + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} \right). \quad (21)$$

Если учесть (19)...(21), то из (18) следует

$$a_n = \frac{8h}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2}. \quad (22)$$

Допуская, что в фазе заступа нить не контактирует с галевом и перемещение

ремизки ей не передается, а сама нить находится только под действием заправочного натяжения, тогда начальные скорости движения ее точек отсутствуют и, следовательно, $b_n = 0$.

Подставив значение a_n в (10), получим

$$U(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi n a t}{L}. \quad (23)$$

Ряд (23) позволяет определить положение точек нити при заданных x и t . Кроме того, целесообразно получить уравнения

для подсчета скорости и ускорения элементов нити. Продифференцировав (23) по времени, запишем:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{8ha}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi n x}{L} \sin \frac{\pi n a t}{L}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{8ha^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} -\sin \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi n a t}{L}. \quad (25)$$

Соотношения (23)...(25) получены из ряда (10). Последний можно записать в несколько иной форме [2]:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos(\omega_n t - \delta_n) \sin \frac{\pi n x}{L}, \quad (26)$$

где $\gamma_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\omega_n = \frac{\pi n a}{L}$,

$$\operatorname{tg} \delta_n = \frac{b_n}{a_n}.$$

В уравнении (26) каждое из слагаемых описывает движение нити (струны) в виде стоячей волны [2]. Эта волна образуется за

счет наложения прямой и обратной волн, которые отражаются от концов нити. В этом случае все частицы нити совершают колебания с одной и той же частотой, которую можно подсчитать по следующей формуле [2]:

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{L} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{Q}{\rho}}. \quad (27)$$

Частота ω_1 является наиболее низкой и соответствует основному тону нити. Более высокие частоты (кратные ω_1) отражают обертоны:

$$\omega_n = \omega_1 n. \quad (28)$$

Из (27) следует, что частота колебаний нити возрастает при увеличении силы натяжения Q и снижается при росте значений L и ρ .

Приведем расчет частоты ω_1 применительно к станку СТБ2-180. Имеем: нить из фенилона 29 текс; $Q = 0,25\text{Н}$; $L = 1\text{м}$; $\rho = 0,00003\text{ кг/м}$. Используя (27), получим

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{Q}{\rho}} = \frac{3,14}{1} \sqrt{\frac{0,25}{0,00003}} \approx 286,64\text{ с}^{-1}.$$

Нить в фазе заступа совершает свободные колебания (основной тон) с частотой $286,64\text{ с}^{-1}$. Если подсчитать обертоны, то

они значительно превышают основную частоту колебаний нити.

ВЫВОДЫ

1. Свободные колебания нити основы, находящейся на станке в положении фазы заступа, подчиняются тем же законам, что и колебания струны, закрепленной в двух точках и имеющей начальное натяжение. Колебания нити, как и колебания струны, описываются одним и тем же однородным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных.

2. На частоту колебаний нити оказывает влияние ее натяжение, плотность нити, а также ее длина от опушки ткани до скала. С целью снижения колебаний нити следует устанавливать минимально возможное начальное натяжение основы, что будет способствовать снижению облета шлихты и сокращению обрывности основных нитей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1972, т. 2. С.376...383.
2. Мартисон Л.К., Маслов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. С. 39...52.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 10.03.05.