УДК 687.021.531.36

К ТЕОРИИ УПРУГИХ ТЕКСТИЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК, НЕ ПОЛНОСТЬЮ ПРИЛЕГАЮЩИХ К ОХВАТЫВАЕМЫМ ИМИ ТЕЛАМ*,**

Е.В. ПОЛЯКОВА, В.Я. ЭНТИН, В.А. ЧАЙКИН

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

Рассматривается проблема определения форм и деформаций мягких (не сопротивляющихся изгибаниям) оболочек, прилегающих к удерживающим их телам лишь частью своей поверхности. Такого рода задачи возникают при изучении различных процессов обработки и использования тканей, пленок, трикотажных изделий. В основу работы положен вариационный метод изучения оболочек, основанный на принципе минимума их потенциальной энергии деформации.

1. Общая форма функционала энергии. Для указания положений частиц оболочки в пространстве будем пользоваться декартовой координатной системой Oxyz, системой цилиндрических координат $z\varphi R$ и осью ς, совмещенной с осью z.

Сообщим оболочке какое-нибудь положение в пространстве – такое, при котором она не имеет растянутых частей и является гладкой всюду кроме, может быть, конечного числа линий излома. Будем называть это положение оболочки "недеформированным". В качестве лагранжевых (материальных) координат частицы оболочки будем использовать те значения координат ς и φ, которые эта частица имеет при "недеформированном" состоянии оболочки.

Допустим, что в этом состоянии положение оболочки в пространстве определяется равенством

$$\vec{r} = \vec{r}_0(\varsigma,\varphi) = \vec{i}R_0(\varsigma,\varphi)\cos\varphi + \vec{j}R_0(\varsigma,\varphi)\sin\varphi + \vec{k}\varsigma, \tag{1}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор произвольной частицы оболочки относительно начала O координатной системы Oxyz; $R_0(\varsigma,\varphi),\varphi,\varsigma$ – цилиндрические координаты частиц оболочки, находящейся в недеформированном состоянии; $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – базисные векторы системы Oxyz.

Обозначим через $u_z(\varsigma,\varphi), u_\varphi(\varsigma,\varphi)$ и $u_R(\varsigma,\varphi)$ величины возникающих вследствие деформации оболочки приращений цилиндрических координат ее частицы, имеющей лагранжевы координаты (ς,φ).

Тогда форму, которая принимается оболочкой в результате ее деформирования, можно описать уравнением:

$$\begin{aligned}\vec{r} = \vec{r}(\varsigma,\varphi) &= \vec{i}\,(R_0(\varsigma,\varphi) + u_R(\varsigma,\varphi))\cos(\varphi + u_\varphi(\varsigma,\varphi)) + \\ &+ \vec{j}(R_0(\varsigma,\varphi) + u_R(\varsigma,\varphi))\sin(\varphi + u_\varphi(\varsigma,\varphi)) + \vec{k}(\varsigma + u_z(\varsigma,\varphi)).\end{aligned} \tag{2}$$

* Начало.
** В порядке обсуждения.

Вариационный метод решения задачи о равновесии оболочки состоит в том, что среди множества ее деформированных состояний, совместимых с наложенными на нее связями, ищется то состояние, при котором ее потенциальная энергия будет минимальна. Применяя этот метод, нужно из всего множества допускаемых функций $u_z(\varsigma,\varphi), u_\varphi(\varsigma,\varphi)$ и $u_R(\varsigma,\varphi)$ выбрать те, которые доставляют минимум потенциальной энергии оболочки. Поэтому потенциальную энергию оболочки U будем рассматривать как функционал $U[u_z,u_\varphi,u_R]$, определенный на множестве указанных функций. При этом, как обычно, допустим, что потенциальная энергия оболочки равна сумме потенциальных энергий ее частей, то есть:

$$U[u_z,u_\varphi,u_R]=\iint\limits_S u(\varsigma,\varphi)dS, \qquad (3)$$

где $u(\varsigma,\varphi)$ – плотность потенциальной энергии, отнесенная к единице площади оболочки при ее недеформированном состоянии, а интеграл берется по поверхности оболочки.

2. Энергия осесимметрично деформированной оболочки. Пусть в "недеформированном" и в деформированном состояниях форма оболочки и распределения возникающих в ней напряжений и деформаций симметричны относительно оси z, то есть описываются функциями, не зависящими от φ. Предположим также, что оболочка не подвергнута скручиванию относительно этой оси, то есть $u_\varphi(\varsigma,\varphi)\equiv 0$.

Тогда формула (2) может быть записана в виде

$$\vec{r}=\vec{r}(\varsigma,\varphi)=\vec{i}\,(R_0(\varsigma)+u_R(\varsigma))\cos\varphi+\vec{j}\,(R_0(\varsigma)+u_R(\varsigma))\sin\varphi+\vec{k}(\varsigma+u_z(\varsigma)). \qquad (4)$$

При "недеформированном" состоянии оболочки длина Δ_z^0 ее меридионального элемента, концы которого имеют лагранжевы координаты (ς,φ) и $(\varsigma+d\varsigma,\varphi)$, а также длина Δ_φ^0 ее элемента, лежащего на параллели и имеющего концы с лагранжевыми координатами (ς,φ) и $(\varsigma,\varphi+d\varphi)$, определяются формулами

$$\Delta_z^0=\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma)}{d\varsigma}\right)^2+1}\,d\varsigma,\quad \Delta_\varphi^0=R_0(\varsigma)d\varphi. \qquad (5)$$

При деформированном состоянии оболочки длины Δ_z и Δ_φ этих же элементов определяются формулами

$$\Delta_z=\sqrt{\left(\frac{d(R_0(\varsigma)+u_R(\varsigma))}{d\varsigma}\right)^2+\left(1+\frac{du_z(\varsigma)}{d\varsigma}\right)^2}\,d\varsigma,$$
$$\Delta_\varphi=(R_0(\varsigma)+u_R(\varsigma))d\varphi. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что относительные удлинения меридианов и параллелей оболочки определяются соответственно формулами

$$\varepsilon_1=\frac{\Delta_z-\Delta_z^0}{\Delta_z^0}=\sqrt{\left(\frac{d(R_0(\varsigma)+u_R(\varsigma))}{d\varsigma}\right)^2+\left(1+\frac{du_z(\varsigma)}{d\varsigma}\right)^2}\Bigg/\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma)}{d\varsigma}\right)^2+1}-1,$$
$$\varepsilon_2=\frac{\Delta_\varphi-\Delta_\varphi^0}{\Delta_\varphi^0}=\frac{u_R(\varsigma)}{R_0(\varsigma)}. \qquad (7)$$

Если материал оболочки является линейно-упругим, то плотность потенциальной энергии деформации является [1] квадратичной формой от ε_1 и ε_2. Поэтому, учитывая, что элемент площади оболочки равен

$$dS = R_0(\varsigma)\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma)}{d\varsigma}\right)^2 + 1}\,d\varsigma d\varphi, \tag{8}$$

выражение (3) для потенциальной энергии оболочки можем представить в виде

$$U[u_z, u_R] = \pi\int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2}(k_1\varepsilon_1^2(\varsigma) + 2k_{12}\varepsilon_1(\varsigma)\varepsilon_2(\varsigma) + k_2\varepsilon_2^2(\varsigma))R_0(\varsigma)\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma)}{d\varsigma}\right)^2 + 1}\,d\varsigma, \tag{9}$$

где ς_1 и ς_2 – лагранжевы координаты точек нижней и соответственно верхней кромок оболочки; k_1, k_{12} и k_2 – коэффициенты, характеризующие упругие свойства оболочки.

Далее, для краткости, будем считать, что $k_{12} = 0$; это равенство, в частности, выполняется [2] для оболочек, имеющих структуру сетки с прямоугольными ячейками.

Введем в качестве искомых функций вместо перемещений частиц оболочки функцию $R(z)$, задающую радиус деформированной оболочки в сечении с координатой z, и функцию $\varsigma(z)$, устанавливающую связь между координатой z частицы оболочки и лагранжевой координатой ς этой частицы. Учитывая равенства

$$R(z) = R_0(\varsigma(z)) + u_R(\varsigma(z)), \quad z = \varsigma(z) + u_z(\varsigma(z)), \quad \frac{dz}{d\varsigma} = \left(\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right)^{-1}, \tag{10}$$

перепишем выражения (7) для относительных удлинений в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left|\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right|^{-1}\sqrt{\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)^2 + 1}\Bigg/\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma(z))}{d\varsigma}\right)^2 + 1} - 1, \\ \varepsilon_2 &= \frac{R(z)}{R_0(\varsigma(z))} - 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Будем считать, что оболочка, охватывая тело, простирается от кромки, точки которой имеют координаты $z = h_1$, до кромки, точки которой имеют координаты $z = h_2$.

Тогда согласно (11) и (9) имеем следующее представление потенциальной энергии оболочки:

$$U[R,\varsigma] = \pi\int_{h_1}^{h_2}\left(k_1\left(\left(\frac{d\varsigma(z)}{dz}\right)^{-1}\sqrt{\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)^2 + 1}\Bigg/\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma(z))}{d\varsigma}\right)^2 + 1} - 1\right)^2 + \right.$$

$$\left. + k_2\left(\frac{R(z)}{R_0(\varsigma(z))} - 1\right)^2\right)\sqrt{\left(\frac{dR_0(\varsigma(z))}{d\varsigma}\right)^2 + 1}\,\frac{d\varsigma(z)}{dz}R_0(\varsigma(z))dz. \tag{12}$$

ВЫВОДЫ

1. Характеристики деформации оболочки выражены через перемещения ее частиц.

2. Потенциальная энергия оболочки представлена в виде функционала, зависящего от ее формы и деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983.
2. *Чайкин В.А., Полякова Е.В.* Основы механики мягких оболочек и тканей. – СПб.: СПГУТД, 2004.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 04.04.05.