

УДК 536.24.01: 539.217.1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СУШКИ ПОРИСТЫХ ТЕЛ*

И.П. КОРНЮХИН, Л.И. ЖМАКИН, Т.А. КОРНЮХИНА

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Настоящая работа является заключительной в цикле статей [1...3], посвященных выводу и анализу системы уравнений тепломассообмена в массивных пористых телах применительно к процессам сушки.

Величина характеризующего движение жидкой фазы капиллярного давления p_c

зависит от насыщенности и от величины поверхностного натяжения жидкости.

В [4] для грунтов используется полуэмпирическая зависимость капиллярного давления от насыщенности в форме

$$p_c = -p_0 \frac{\theta_0}{\theta} \frac{1-\theta^3}{1-\theta_0^3}, \quad (1)$$

* Окончание.

где θ_0 – остаточная насыщенность, определяемая количеством заземленной влаги и влаги, удерживаемой физико-химическими связями, при которой прекращается движение жидкости в твердом теле; p_0 – капиллярное давление при $\theta = \theta_0$. Для того, чтобы учесть влияние поверхностного натяжения жидкости, представим это давление в виде $p_0 = c_0 \sigma / \sqrt{K/\epsilon}$, где c_0 – безразмерная константа.

Возможность использования формулы (1) для тканей была проверена экспериментально на описанной в [5] установке для исследования равновесия при больших влагосодержаниях, при помощи которой определялась зависимость влагосодержания от капиллярного давления. Насыщенность рассчитывалась как отношение текущего значения влагосодержания к максимальному.

На рис. 1 (где показана зависимость капиллярного давления от насыщенности) результаты опытов для трех артикулов

тканей (1 – шерстяной, арт. 3302; 2 – полшерстяной, арт. 206 и 3 – хлопчатобумажной, арт. 3302аб) сопоставлены с зависимостью (1), представленной в форме $p_c = c'(1 - \theta^3)/\theta$. Сопоставление показывает, что в целом, несмотря на заметный разброс, опытные данные для коллоидных капиллярно-пористых тел не противоречат зависимости (1).

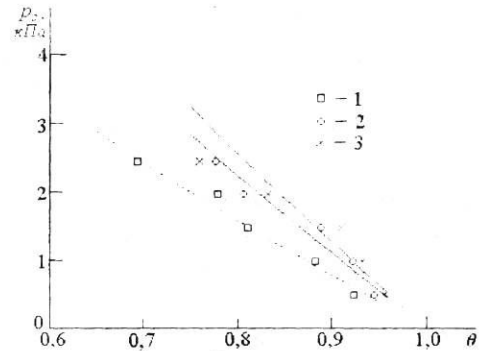


Рис. 1

Учитывая зависимость капиллярного давления от насыщенности и поверхностного натяжения, уравнение движения жидкости можно представить в форме

$$w_i^f = -\frac{K\psi^f(\theta)}{\eta^f} \left(\frac{\partial p^g}{\partial x_i} + \frac{\partial p_c}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial p_c}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) + \epsilon R^v \left(\frac{w_i^g \tilde{\theta}}{1 - \tilde{\theta}} - w_i^f \right). \quad (2)$$

Второе слагаемое слева в уравнении (2) определяет, что жидкость движется в сторону меньших значений насыщенности ($\partial p_c / \partial \theta > 0$), а третье слагаемое характеризует известное для капиллярных тел явление перемещения жидкости в область меньших температур ($\partial p_c / \partial \sigma < 0$; $\partial \sigma / \partial t < 0$). Этот последний член фактически описывает эффект Марангони-Гиббса (термоградиентное течение) в пористых телах.

В пределе при $\theta \rightarrow \theta_0$ уравнение движения жидкости вырождается, жидкость остается неподвижной, и перенос влаги осуществляется за счет испарения жидкости и переноса ее паром.

Величина влагосодержания W определяется как отношение массы жидкости к массе сухого тела в предположении, что

массой пара в пористом теле можно пренебречь по сравнению с массой жидкости.

При этом связь между насыщенностью и влагосодержанием выражается как

$$W = \theta \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \frac{\rho^f}{\rho^s}. \quad (3)$$

Если обе части уравнения (2) умножить на плотность жидкости и пренебречь влиянием градиента давления в газообразной фазе, а также межфазным переносом импульса, то указанное уравнение формально можно представить как соотношение для определения плотности потока массы жидкости j^f :

$$j_i^f = -D^f \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \delta^T \frac{\partial t}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

$$D^f = \frac{K \psi^f(\theta)}{v^f} \frac{\partial p_c}{\partial \theta}, \quad \delta^T = \frac{\partial p_c}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} / \frac{\partial p_c}{\partial \theta}. \quad (5)$$

Здесь формально введены коэффициент диффузии D^f и относительный коэффициент термодиффузии δ^T (по терминологии [6]). При указанных допущениях и преобразованиях (5) уравнение движения (4) практически совпадает с предложенной в [6] формулой для определения плотности потока массы.

Воспользовавшись уравнением (1) и результатами проведенного эксперимента, можно оценить значения D^f и δ^T , причем величину последнего можно представить как

$$\delta^T = -g(\theta) \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad g(\theta) = \frac{\theta(1-\theta^3)}{1+2\theta^3}.$$

Сопоставление рассчитанных и приведенных в [6] экспериментальных значений D^f и δ^T показало, что они близки по порядку величины. Более того, зависимость $g(\theta)$, показанная на рис. 2 (зависимость величины, пропорциональной относительному коэффициенту термодиффузии, от влагосодержания) для трех артикулов ткани, качественно близка к представленной в [6] экспериментальной зависимости $\delta^T(\theta)$ – обе зависимости имеют максимум.

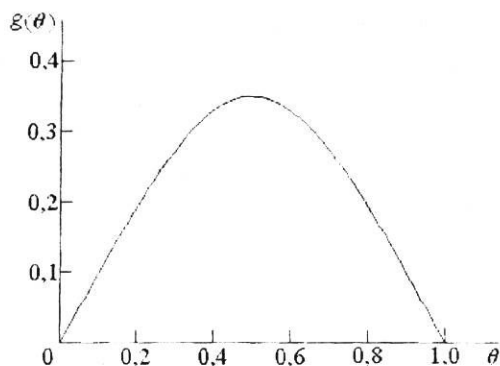


Рис. 2

Следует отметить однако, что в реальном случае величина δ^T демонстрирует резкий спад при уменьшении влагосодержания. По-видимому, этот спад наблюдается в окрестности значения $\theta = \theta_0$, когда прекращается движение жидкости и эффект Марангони-Гиббса не проявляется, так что влияние градиента температуры на перенос жидкости сменяется более слабым эффектом термодиффузии.

Заменим в уравнениях неразрывности (15), (16) из [2] среднюю скорость движения жидкости в капиллярах на скорость фильтрации, в результате чего получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\varepsilon(1-\theta)q^g) = -\nabla \cdot ((q_w)^g) + \varepsilon R^v, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\varepsilon \theta q^f) = -\nabla \cdot ((q_w)^f) - \varepsilon R^v. \quad (7)$$

При атмосферном давлении и не очень низких температурах влажный воздух в порах с хорошей точностью можно рассматривать как идеальный газ. При этом, как отмечалось выше, молярные и объемные доли компонентов смеси совпадают, а плотности рассчитываются как

$$q^v = \frac{p^g \mu^v}{R_\mu T}; \quad q^a = \frac{p^g \mu^a}{R_\mu T}; \quad (8)$$

$$q^g = q^v \chi + q^a (1-\chi),$$

где μ – молярная масса компонента смеси; R_μ – универсальная газовая постоянная.

Связь между массовой и объемной долями пара определяется формулой

$$\omega^v = \frac{q^v \chi}{q^v \chi + q^a (1-\chi)} = \frac{\mu^v \chi}{\mu^v \chi + \mu^a (1-\chi)}.$$

Помимо уравнений неразрывности система уравнений включает уравнение конвективной диффузии для пара во влажном воздухе (уравнение (7) из [3]):

$$\varepsilon(1-\theta)\rho^g \frac{\partial}{\partial \tau} \omega^v = -\rho^g w_i^g \frac{\partial \omega^v}{\partial x_i} + \nabla(\rho^g D \nabla \omega^v), \quad (9)$$

уравнение энергии (уравнение (8) из [3]):

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\left(\rho^f w_i^f + \rho^g (\omega^v w_i^v + \omega^a w_i^a)\right) \frac{\partial t}{\partial x_i} - \varepsilon R^v + (h^a - h^v) \nabla(\rho^g D \nabla \omega^v) + \varepsilon(1-\theta) \frac{\partial p^g}{\partial \tau} \quad (10)$$

и уравнения движения фаз (уравнения (14, 15) из [3]):

$$w_i^g = -\frac{K\psi^g(\theta)}{\eta^g} \frac{\partial p^g}{\partial x_i} + \varepsilon R^v \left(\frac{w_i^f (1-\tilde{\theta})}{\tilde{\theta}} - w_i^g \right), \quad (11)$$

$$w_i^f = -\frac{K\psi^f(\theta)}{\eta^f} \left(\frac{\partial p^g}{\partial x_i} + \frac{\partial p_c}{\partial x_i} \right) + \varepsilon R^v \left(\frac{w_i^g \tilde{\theta}}{1-\tilde{\theta}} - w_i^f \right). \quad (12)$$

Система уравнений тепломассообмена в пористых телах замыкается при помощи уравнения, описывающего равновесие между жидкостью и паром во влажном воздухе. При значениях влагосодержания, превышающих максимальное гигроскопическое, условия равновесия такие же, как и для объемной жидкости:

$$\rho^v = \frac{\rho_{sat}(t)}{\chi}. \quad (13)$$

При значениях влагосодержания, меньших, чем максимальное гигроскопическое, для описания равновесия необходимо привлечь уравнение изотермы десорбции, определяющее равновесную относительную влажность воздуха φ как функцию температуры и влагосодержания:

$$\varphi = f(T, W), \quad (14)$$

либо в эквивалентной форме:

$$\rho^v = \frac{\rho_{sat}(t)}{\chi} f(T, W). \quad (15)$$

Конкретный вид функций $\varphi = f(T, W)$ для различных текстильных материалов представлен в [7]. В частности, для многих текстильных материалов найдено уравне-

ние изотермы десорбции с учетом температурной зависимости.

В уравнениях (9), (11) функция $\rho_{sat}(t)$ характеризует зависимость плотности насыщенного пара от температуры. Заметим, что эти уравнения описывают как среднюю плотность пара во влажном воздухе, так и плотность пара на межфазной поверхности. Такой подход правомерен при значениях массообменного капиллярного числа Пекле $Pe \ll 1$, когда поперечный диффузионный поток значительно больше конвективного. Учитывая, что для влажного воздуха число Шмидта $Sc \approx 1$ условие $Pe < 0,1$ выполняется одновременно с условием $Re < 0,1$, определяющим границы применимости рассмотренной системы уравнений.

Таким образом, получена система уравнений тепломассообмена в капиллярно-пористом теле, включающая уравнения неразрывности для фаз (6), (7), уравнение диффузии водяного пара во влажном воздухе (9) с учетом замены D на D_e , уравнение энергии (10), уравнения движения фаз (11), (12), уравнение межфазного равновесия (13) или (15). Эти 7 основных уравнений содержат также 7 основных неизвестных функций, характеризующих поля: насыщенности θ , связанной линейной зависимостью с влагосодержанием, температу-

ры, массовой ω^v , либо связанной с ней молярной χ доли пара, скоростей фаз w^g и w^f , объемной мощности внутренних источников массы пара, характеризующей интенсивность фазовых переходов R^v и давления в газообразной фазе p^g . Поле давлений в жидкости определяется через поле давлений в газообразной фазе формулой Лапласа. Совпадение числа неизвестных функций с числом дифференциальных уравнений свидетельствует о замкнутости системы.

Возможность применения полученной системы уравнений обоснована в области значений числа $Re < 0,1$. Оценивая, как и ранее в работе [1], время сушки по формуле $\tau = L/w$ и используя приведенное выше определение числа Рейнольдса, получим

$$Re = \frac{L\rho}{\eta\tau} \sqrt{\frac{K}{\varepsilon}}.$$

Выполненные на основании этого определения оценки времени сушки для $L = 10^{-2}$ м, при которых может быть использована полученная система уравнений, дают значения τ порядка нескольких секунд для крупнопористых тел и долей секунды для тел с мелкой пористостью.

Таким образом, полученная система уравнений в отличие от системы [8] может быть использована для описания достаточно интенсивных режимов сушки.

ВЫВОДЫ

Выполнен анализ известных методов расчета тепломассообмена в массивных пористых телах на базе классических законов сохранения и уравнений переноса для модели пористого тела с тремя характер-

ными размерами. Операция осреднения по областям с характерными размерами, существенно превышающими размеры пор, позволила получить систему уравнений тепломассообмена для пористых тел. Система дифференциальных уравнений замкнута с помощью уравнения фазового равновесия, роль которого выполняют уравнения изотерм сорбции-десорбции.

Проведен анализ и упрощение полученной системы; установлено, что использование известной связи между насыщенностью и капиллярным давлением позволяет найти зависимость коэффициента термодиффузии от влагосодержания, качественно совпадающую с экспериментальной. Система уравнений применима для описания процессов сушки высокой интенсивности при умеренных (порядка единицы) и больших значениях чисел Био.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнюхин И.П., Жмакин Л.И., Козырев И.В. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2004, № 4. С.94...99.
2. Корнюхин И.П., Жмакин Л.И., Корнюхина Т.А. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2004, № 6. С.119...123.
3. Корнюхин И.П., Жмакин Л.И., Корнюхина Т.А. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2005, № 1. С.131...135.
4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977.
5. Корнюхин И.П., Савельев А.А., Чуркина Н.В. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1991, № 4. С.83...87.
6. Лыков А.В. Теория сушки. – М.: Энергия, 1968.
7. Корнюхин И.П., Жмакин Л.И., Козырева Л.И. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2000, №6. С.84...90.
8. Решетин О.Л., Орлов С.Ю. // Журнал технической физики. – 1998, № 2, т. 68.

Рекомендована кафедрой промышленной теплоэнергетики. Поступила 05.02.04.