УДК (677.024.1:677.017.35).681.3

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ АЛЬТЕРНАТИВ ПО ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА УКЛАДКИ ЛЕКАЛ НА РУЛОННЫЙ МАТЕРИАЛ*

В.В. КЛЕЙНОСОВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина)

Накопленный опыт раскладки различных лекал легкой и текстильной промышленности на материалы рулонного типа показал:

1) время $t_в$ поиска величины $L_{min}(B)$ – сильно растущая по $\|B\|$ величина;

2) функция $t(\|B\|)$ – выпуклая вниз функция.

Оказалось, что для представления функции с определенным успехом можно использовать обычную экспоненту, зависящую от двух числовых параметров $\alpha > 0$, $\beta > 0$:

$$t(\|B\|) = \alpha \exp\{\beta \|B\|\}.$$

Возникает вопрос, для каких значений $\|B\|$ величину $L_{min}(B)$ все-таки можно отыскать, затратив при этом время в отведенных производству пределах. Это должно указать лицо, принимающее решения (ЛПР), имея определенный план.

Построение плана начинается с разбиения плана B на части. Очевидно, что разбиение плана B на части ($\|B\|$-1, 1) не приведет к существенному облегчению решения вопроса, так как решение задачи для $\|B\|$-1 мало чем отличается от решения задачи для $\|B\|$. Оно также трудно осуществимо. Поэтому отнимать от $\|B\|$ нужно не единицу, а более весомую величину — $y < \|B\|$. Найдем такое $y=y^*$, при котором величина $R(y^*)=t(\|B\|-y^*)+t(y^*)$ приняла бы минимальное значение.

Используя функцию $R(y^*)$ и необходимое условие ее экстремума по y^*:

$$-\alpha\beta \exp\{\beta(\|B\| - y)\} + \alpha\beta \exp\{\beta y\} = 0,$$

сокращая на $\alpha\beta$, перенося одно из слагаемых в другую часть и приравнивая значение экспонент справа и слева, будем иметь:

$$\beta(\|B\| - y^*) = \beta y^*.$$

Сокращая на β, получим

$$y^* = \|B\| / 2.$$

Учитывая, что

$$\alpha\beta^2 \exp\{\beta \frac{\|B\|}{2}\} > 0,$$

делаем вывод: $y^* = \|B\|/2$ – точка минимума функции $R(y^*)$.

Значит, уменьшая $\|B\|$ вдвое, можно минимизировать суммарное время отыскания величины L_{min} для каждой из частей.

---

* **Окончание. Начало см. в №2 за 2005 г.**

Разбиение вектора В по норме на две части (или близким к тому) выполняется на два целочисленных вектора не единственным образом.

Для вектора В = (2, 3, 4, 1) $\|B\| = 10$ такими разбиениями будут (2, 3, 0, 0) и (0, 0, 4, 1); (1, 3, 0, 1) и (1, 0, 4, 0); (0, 3, 1, 1) и (2, 0, 3, 0); (2, 1, 2, 0) и (0, 2, 2, 1); (2, 2, 0, 1) и (0, 1, 4, 0); (2, 0, 2, 1) и (0, 3, 2, 0); (2, 1, 1, 1) и (0, 2, 2, 0) и т.д.

Из этих разложений выберем векторы с одинаковым распределением координат или близких к ним. Здесь такими векторами будут (1, 2, 2, 0) и (1, 1, 2, 1).

Поиск одинаковых векторов – это естественная минимизация времени укладки лекал.

Так, векторы В=(2, 6, 10, 12) $\|B\|=30$ разлагаются на два одинаковых (1, 3, 5, 6) = В1 = В2 $\|B1\| = \|B2\| = 15$. В этом случае нужно ставить только один опыт для определения L_{min}, что существенно экономит время.

Оставляя право выбора вида разложения вектора В на составляющие с половинными нормами лицу, принимающему решение, в дальнейшем будем придерживаться разложений с одинаковыми или близкими к одинаковым распределениями.

Может оказаться, что в результате разбиения вектора В на две составляющие с равными нормами и одинаково или близко распределенными поиск величин L_{min} для обеих составляющих за планируемый промежуток времени окажется проблематичным.

В этом случае следует перейти к новому уровню разбиения по тому же принципу. При повторении ситуации – к новому. Таким образом, можно получить дерево дихотомии с "венцом" в виде набора всех единичных векторов, повторенных b_i раз, (i = 1, 2, …m).

Последовательные этапы разбиения векторов на части согласно изложенному выше правилу назовем уровнями.

Сам вектор В считается нулевым этапом разбиения; получающиеся из него векторы – первым этапом и т.д.

Некоторым образом записанную строку векторов некоторого этапа разбиения назовем строкой этого этапа. Для предложенного вектора В = (2, 3, 4, 1) строка первого этапа имеет вид

(1, 1, 2, 1) , (1, 2, 2, 0)

Строку второго этапа можно записать следующими способами:

(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1) , (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0);

(0, 1, 1, 0), 2(1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1);

(1, 0, 1, 1), 2(0, 1,1, 0), (1, 1, 1, 0)

в зависимости от трех различных способов разложения вектора (1, 1, 2, 1) на части с нормами 2 и 3.

В каждой из 3-х строк второго этапа содержится план эксперимента для оценки $L_{min}(B)$ вектора В, и ЛПР может для проведения эксперимента выбрать любую строку.

Если ЛПР, например, выбрал первую строку, а реализация опыта, соответствующего ей, оказалась по тем или иным соображениям трудоемкой, то можно перейти к строке третьего уровня 2(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), 3(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0), содержащей векторы с нормами 1 и 2.

Если сделать четвертый шаг дробления, то неизбежно придем к “венцу” дерева {2e1, 3e2, 4e3, e4}, где e_j (i = 1, 2, 3, 4) единичные векторы. На этом вышеописанный процесс кончается.

Казалось бы, что в результате деления норм пополам количество векторов для уровня k будет равно 2^k. Однако за счет возможной группировки образовавшихся одинаковых векторов количество векторов уменьшается в конце концов до числа m – размерности вектора – плана В.

Число необходимых экспериментов на каждом уровне равно числу различных векторов этого уровня.

Самый простой для рассмотрения пример – это четвертый уровень. Здесь нужно провести четыре опыта соответственно для векторов (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) и (0, 0, 0, 1) и, определив для них значения L_{min} и t, занести их соответственно в верхние и нижние клетки (слева) каждого из этих векторов. Будем считать, что время измерено в секундах, а L_{min} в сантиметрах.

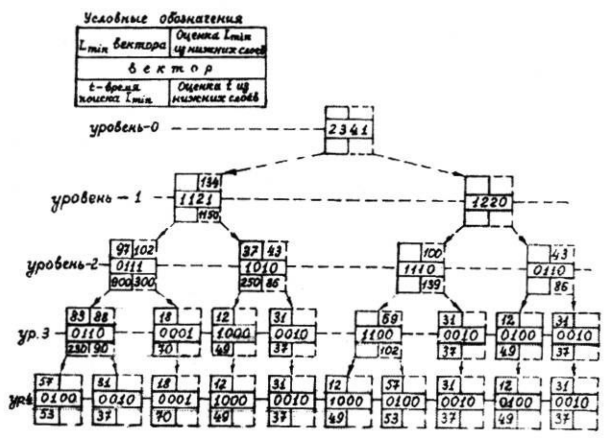

Рис. 1

Из рис. 1, на котором представлено дерево дихотомии, можно определить необходимую для плана B по уровню 4 суммарную длину материала (118) и необходимое время (209). В дальнейшем этот результат будем записывать в виде вектора (118, 209).

Здесь мы имеем дело с полным факторным экспериментом четвертого уровня.

О затратах на вектор B можно судить по дробным экспериментам, сделанным на разных уровнях. Эта информация может быть получена либо по всем данным опыта текущего уровня, либо частично состоять из данных текущего уровня и оценочных данных более низких уровней (на рис. 1 оценочные значения стоят правее полученных экспериментально).

Так, на втором уровне можно получить оценки L_{min} и t исходя из данных дробных экспериментов, полученных на втором — четвертом уровнях. Они будут: L_{min} = 97+77+12+57+31+12+37 = 277 см; t = 600+250+49+53+37+49+37 = 1375 с.

Суммарные расходы для любого уровня следует считать тогда, когда на этом уровне проведен хотя бы один эксперимент.

Рассмотренная здесь теория безусловно относится к ценному или очень ценному материалу, когда потеря большого количества времени на поиск L_{min} компенсируется мизерной экономией длины L_{min}. Однако в условиях производства расходы времени по разным причинам ограничены, и время здесь рассматривается с некоторым весом, учесть который в зависимости от различных сложившихся обстоятельств в модели не представляется возможным. Поэтому уровень, на котором предстоит проводить эксперимент, определяется максимально допустимым временем. Его определяет ЛПР.

Заметим, что для недорогих материалов необязательно тратить массу времени на поиск L_{min} – можно обойтись быстро найденной, не самой плохой укладкой с расходом L.

Для каждого конкретного материала проводятся опыты на одном, в редких случаях, на двух уровнях.

С возрастанием ценности материала уровень проведения опыта сдвигается в сторону нулевого.

Номер первого, возможного для проведения опытов, уровня (это самый меньший по номеру уровень) назовем критическим (с точки зрения ЛПР) (большего времени на поиск L_{min} по тем или иным причинам здесь выделить невозможно).

Критический уровень обладает следующим свойством: за предельно допустимое время t_{gon}, назначаемое ЛПР, можно получить дискретную величину $L(t_{gon})$, близкую к L_{min}. Напомним, что по определению $L(t_{пред}) = L_{min}$, где $t_{пред}$ – время, необходимое для получения L_{min}.

В зависимости от значений координат вектора B и величины $\|B\|$ можно получать совершенно не похожие друг на друга критические уровни. С уменьшением $\|B\|$ можно получить $L(t_{gon}) = L_{min}$ (t_{gon} – небольшое конечное число).

Для произвольного вектора B критический уровень обладает свойствами минимального суммарного расхода времени по различным разбиениям вектора B.

В том частном случае, когда вектор B разлагается на сумму одинаковых векторов (назовем этот случай особым), можно натолкнуться либо на идеальный случай, либо на очень плохой.

Идеальный случай для вектора $B = k(v_1, v_2, \dots v_m)$ будет тогда, когда за допустимое время t_{gon} или меньшее его (чем меньше, тем лучше) будет получаться плотная или почти плотная упаковка вектора B/k на предлагаемый рулон. Очень плохой – когда $t_{gon} < t_{пред}$, отводимое на получение величины L_{min} для вектора $(v_1, v_2, \dots v_m)$, то укладка вектора B/k на материал, мягко говоря, не идеальна.

Натолкнувшись на особый случай, можно воспользоваться описанным выше – общим.

В заключение рассмотрим благоприятный особый случай для рассматриваемой задачи, когда нужно выполнить план B' не менее,чем B ($b'i \geq bi$) .

Пусть, например, B = (57, 17, 129). Очевидно, найдется бесконечное множество векторов $\beta = (\beta1, \beta2, \beta3)$ с целыми положительными коэффициентами, удовлетворяющими условию $k\beta > B$, при целом положительном k. Допустим, согласно регламенту на проведение опыта назначена норма $\|\beta\| = 10$. И в этом случае получится бесконечно много решений, однако, если искать вектор $B1 \geq B$, ближайший к вектору B из условия ρ (B1, B) = min, то получим единственное решение в целых числах B1 = 22 (3, 1, 6), где ρ – расстояние.

Если за время t1 эксперимент по укладке вектора (3, 1, 6) на материал ширины H дал результат L1 (единиц длины), то на реализацию плана B1 уйдет 22 L1 единиц длины материала.

Таким образом, заключаем.

Во многих случаях оптимальное по некоторому критерию проведение громоздких операций характеризуется числом $\overline{L}$. Однако это число по ряду причин либо не может быть определено в принципе, либо его нельзя получить за конечный, заранее заданный промежуток времени. В этом случае громоздкую операцию "дифференцируют" на мелкие части, характеристики L_j которых могут быть получены за конечный промежуток времени и интегральные характеристики которых $\sum L_j$ могли бы служить оценкой величины $\overline{L}$ худшими или лучшими – в зависимости от степени "дифференцируемости" операции).

Рассматривается операция раскладки лекал, заданных вектором $B = (b_1, b_2, \dots b_m)$, и достаточно большой $\|B\|$ на рулон шириной H так, чтобы израсходовать минимум длины рулона (L_{min}). Здесь "дифференцирование" – разбиение плана B с одинаковым или близким к нему количеством лекал, в каждом из которых с одинаковой степенью трудности ищется L_j.

Полученные в процессе построения дерева дихотомии плотные уровни проведения эксперимента для определения $\sum L_j$ позволяют ЛПР для рассматриваемой задачи в зависимости от предложенного времени найти лучшее приближение к $\overline{L}$, не решая при этом задачи целочисленного программирования.

ВЫВОДЫ

1. На основе статистической гипотезы разработан принцип дробления вектора-плана B на части.

2. Построено дерево дихотомии с различными уровнями планирования эксперимента по определению характеристик t_j и L_{minj} векторов A_j различных разбиений вектора-плана B.

3. Поставлена задача поиска максимального количества одинаковых слагаемых в разложении вектора B.

Рекомендована кафедрой высшей математики. Поступила 05.10.04.