УДК 677.07

АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОРТНОСТИ ПРЯЖИ*

Н.Н. РОЖКОВ

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

Сортность пряжи характеризуется рядом механических показателей. В частности, по разрывной нагрузке нормируемыми показателями являются средняя удельная разрывная нагрузка $\overline{P}$ (сН/текс) и коэффициент вариации C_V по этому показателю. Реже используется обобщенный показатель качества Q, определяемый как отношение:

$$Q = \frac{\overline{P}}{C_V}. \quad (1)$$

В работе проведены анализ и оценка погрешности (определяемой как ошибочное завышение сортности), допускаемой, когда в качестве критерия используется обобщенный показатель качества Q. Ранее эту проблему рассматривали в [1].

Условием отнесения пряжи к сорту i (где $i = 1, 2, 3$) является выполнение неравенств:

$$\overline{P} \geq P^{(i)}_{норм}, \quad C_V \leq C^{(i)}_{V\,норм}, \quad (2)$$

а также

$$Q \geq Q^{(i)}_{норм}, \quad (3)$$

где индекс "норм" указывает на нормативные значения того или иного показателя, а номер в скобках – на соответствующий сорт.

В качестве примера рассмотрим хлопчатобумажную пряжу с линейной плотностью 18,5 текс, сортность которой согласно [2] определяется на основе значений параметров, приведенных в табл. 1 – нормативные значения показателей качества пряжи 18,5 текс, х/б.

Таблица 1

i (сорт)	$P^{(i)}_{норм}$	$C^{(i)}_{V\,норм}$	$Q^{(i)}_{норм}$	$Q^{(i)}_{расч}$
1	9,8	12,5	0,8	0,784
2	9,3	13,5	0,7	0,689
3	8,8	15,0	0,6	0,587

В последнем столбце таблицы приведены расчетные значения $Q^{(i)}_{расч}$ обобщенного показателя качества, определяемые как отношение:

$$Q^{(i)}_{расч} = \frac{\overline{P}^{(i)}_{норм}}{C^{(i)}_{V\,норм}}. \quad (4)$$

Легко видеть, что для всех трех сортов пряжи $Q^{(i)}_{расч} \approx Q^{(i)}_{норм}$, причем относительная погрешность такого приближения не превышает 2,2 %.

Таким образом, практически всегда (в 98 % случаев) выполнение двух неравенств (2) влечет и выполнение неравенства (3). Однако, как будет показано далее, выполнение неравенства (3) не гарантирует выполнения неравенств (2).

Рассмотрим возможные значения данных единичных показателей качества пряжи в системе координат ($\overline{P}$, S), где S – среднеквадратическое отклонение удельной разрывной нагрузки. Выбор такой сис-

* Работа выполнена при поддержке гранта ТО2-03.4-3387 Министерства образования РФ по фундаментальным исследованиям в области технических наук.

темы координат обусловлен тем известным из математической статистики фактом, что в случае, когда выборка взята из нормального закона распределения, выборочные оценки среднего и среднеквадратического отклонения являются статистически не зависимыми [3].

Используя соотношение: $C_V = \dfrac{S}{\overline{P}} \cdot 100\%$, выразим обобщенный показатель качества Q в виде $Q = \dfrac{\overline{P}^2}{S \cdot 100}$.

Тогда неравенства (2) примут вид:

$$\overline{P} \ge P^{(i)}_{\text{норм}}, \quad S \le \frac{C^{(i)}_{V\text{норм}}}{100}\overline{P}, \qquad (5)$$

а неравенство (3) заменится на:

$$S \le \frac{\overline{P}^2}{Q^{(i)}_{\text{норм}} \cdot 100}. \qquad (6)$$

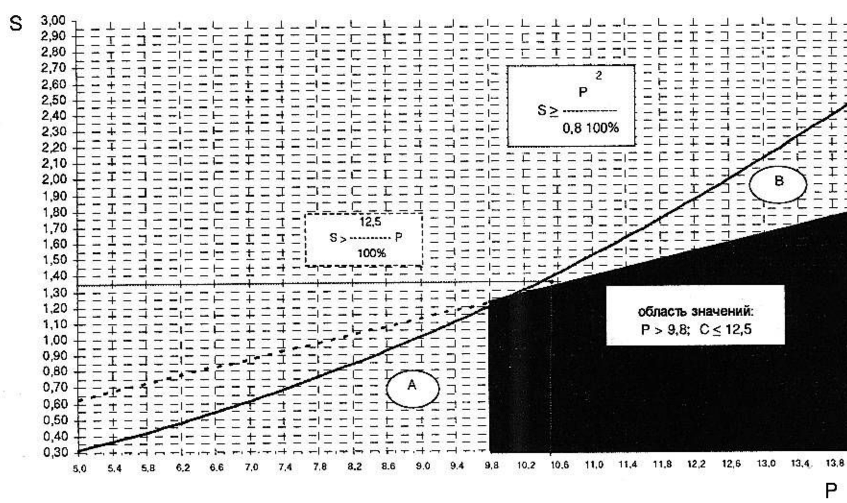

Рис. 1

На рис. 1 для пряжи 1-го сорта (то есть для i = 1) условию (6) соответствует область, лежащая ниже параболы, а условиям (5) – заштрихованная область.

Очевидно, что имеются области возможных значений $\overline{P}$ и S, при которых требования, предъявляемые к пряже данного сорта по обобщенному показателю качества Q , выполняются, но в то же время либо слишком мало значение удельной разрывной нагрузки $\overline{P}$ (область "A"), либо слишком велик коэффициент вариации C_V (область "B").

Если сортность пряжи определять на основе показателя Q, то в случае попадания значений $\overline{P}$ и S в области "A" и "B" сортность будет искусственно завышена. Исходя из нормальности закона распределения удельной разрывной нагрузки P оценим вероятность такого завышения для случая, когда неравенство (3) выполнено на уровне требований для первого сорта.

Эта вероятность будет определяться выражением:

$$P(A \cup B) = \iint\limits_{A \cup B} f(\overline{P}, S)\, d\overline{P}\, dS = \int_0^{P^{(i)}_{\text{норм}}} d\overline{P} \int_0^{C^{(i)}_{V\text{норм}}\overline{P}/100} f(\overline{P}, S)\, dS + \int_{P^{(i)}_{\text{норм}}}^{\infty} d\overline{P} \int_{C^{(i)}_{V\text{норм}}\overline{P}/100}^{\overline{P}^2/(Q^{(i)}_{\text{норм}} \cdot 100)} f(\overline{P}, S)\, dS, \qquad (7)$$

где $f(\overline{P}, S)$ – совместная плотность распределения статистик $\overline{P}$ и S, которая в силу статистической независимости последних распадается на произведение:

$$f(\overline{P}, S) = f_1(\overline{P})\ f_2(S). \qquad (8)$$

Здесь $f_1(\overline{P})$ – плотность распределения нормального закона:

$$f_1(\overline{P}) = \frac{1}{\sigma_{\overline{P}}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\overline{P}-a)^2}{2\sigma_{\overline{P}}^2}\right\}, \qquad (9)$$

где $\sigma_{\overline{P}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; а и σ – соответственно среднее значение и среднеквадратическое отклонение единичного наблюдения удельной разрывной нагрузки; n – объем выборки, с помощью которой производится оценка $\overline{P}$ и S.

В свою очередь, $f_2(S)$ в выражении (8) может быть выражено из того условия, что статистика nS^2/σ^2 подчиняется распределению хи-квадрат с (n-1) степенями свободы. Следовательно, при расчетах элемент вероятности $f_2(S)dS$ в обоих слагаемых формулы (7) можно вычислить при помощи таблиц процентных точек распределения хи-квадрат.

Для упрощения расчетов можно использовать тот факт, что свыше 99% распределения параметра $\overline{P}$ лежат в интервале $a \pm 3\sigma$, и, следовательно, не нужно рассматривать очень большие, но на практике не наблюдаемые значения $\overline{P}$.

Таким образом, вычисление вероятности (7) можно упростить, заменив во втором слагаемом несобственный интеграл на интеграл по конечному промежутку:

$$[P_{\text{норм}}^{(i)}, a + 3\sigma].$$

Заменив неизвестные значения параметров а и σ на их выборочные оценки $\overline{P}$ и S, соответственно можно вычислить вероятность завышения сортности (7).

В качестве числового примера рассмотрим случай:

$$\overline{P} = 10{,}5 \text{ сН/текс}, \ C_V = 12{,}8\%.$$

Данная пряжа должна быть отнесена ко 2-му сорту, так как, хотя она и удовлетворяет требованиям 1-го сорта по средней удельной разрывной нагрузке, но не удовлетворяет им по коэффициенту вариации ($C_V > 12{,}5$).

В то же время обобщенный показатель качества

$$Q = 10{,}5/12{,}8 = 0{,}82 > 0{,}8$$

и если использовать его в качестве критерия оценки сортности, то пряжа будет признана первосортной.

Вычислим $S = C_V\overline{P}/100 = 1{,}34$. Из рис. 1 видно – данные значения $\overline{P}$ и S будут находиться в области "В".

Примем данные значения в качестве оценки истинных параметров распределения удельной разрывной нагрузки, то есть положим $a = 10{,}5$; $\sigma = 1{,}34$.

С помощью расчетов по формуле (7) с учетом (8) и (9) можно получить, что искомая вероятность ошибочного завышения сортности в данном примере будет равна 0,21.

Для более существенных отклонений C_V от нормативов 1-го сорта эта вероятность, очевидно, уменьшится, и найденное значение вероятности можно рассматривать как верхнюю оценку.

ВЫВОДЫ

1. Вероятность ошибочного завышения сортности пряжи на основе обобщенного показателя качества Q может быть достаточно велика.

2. Обобщенный показатель качества Q не может при определении сортности служить адекватной заменой двумерного показателя ($\overline{P}$, C_V).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахмутова Е.Н., Гусев Б.Н., Евсеева Н.В.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1997, №5. С.10...13.

2. ТУ 9010-022-00319693–2002. "Пряжа хлопчатобумажная одиночная и крученая суровая и крашенная для трикотажной промышленности".

3. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 31.01.05.