УДК 667.024.3

КОЛЕБАНИЯ НИТЕЙ ОСНОВЫ[*,**]

С.Г. СТЕПАНОВ, О.С. СТЕПАНОВ

(Ивановская государственная текстильная академия, Ивановский государственный университет)

Известно, что решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

можно осуществить, используя формулу Даламбера или метод Фурье [1].
Вместе с тем в ряде публикаций рекомендуется использовать для решения (1) преобразования Лапласа. Однако применительно к колебаниям нитей основы на ткацком станке решение уравнения (1) с помощью преобразования Лапласа в литературе не приводится.

Получим решение этого уравнения, описывающего свободные колебания нити в фазе заступа. В этот момент основная нить находится под действием заправочного натяжения и силы тяжести ламели. Последнюю учитывать не будем ввиду ее малости. Концы нити закреплены в двух точках: О – опушка ткани, В – сход нити с поверхности скала. Допускаем, что глазки галев не препятствуют колебаниям нити, которые считаем малыми.

Для решения поставленной задачи необходимо, чтобы (1) удовлетворяло начальным

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x)\,, \ 0 \le x \le L \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u\big|_{x=0} = 0\,, \quad u\big|_{x=L} = 0\,, \quad t \ge 0\,. \tag{3}$$

Первое условие (2) соответствует форме осевой линии нити при $t = 0$, второе – скорости движения отдельных ее частиц. Граничные условия (3) отражают перемещения концов нити и относятся к точкам О и В.

Функция $\varphi(x)$ при $t = 0$ определяется следующим рядом Фурье [2]:

$$\varphi(x) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n x}{L}, \tag{4}$$

где n – порядковый номер коэффициента; L – расстояние между опушкой ткани и скалом; h – прогиб нити в области нахождения ламели.

При решении задачи отметим, что $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ являются функциями от t и служат оригиналами.

Для изображений имеем следующие равенства [1, 3]:

$$\overline{u}(x,p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}u(x,t)dt\,, \tag{5}$$

$$\frac{d\overline{u}}{dx} = \int_0^{\infty} e^{-pt}\frac{\partial u}{\partial x}dt\,, \tag{6}$$

$$\frac{d^2\overline{u}}{dx^2} = \int_0^{\infty} e^{-pt}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dt\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq p\overline{u} - u(x,0)\,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \risingdotseq p^2\overline{u} - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\,. \tag{9}$$

[*] Работа выполнена под руководством проф., докт. техн. наук Г.И.Чистобородова.
[**] В порядке обсуждения.

С учетом начальных условий (8) и (9) примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \div p\bar{u} - \varphi(x), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \div p^2\bar{u} - p\varphi(x) - \psi(x). \quad (11)$$

Используя (4)…(11), начальные условия $u(x,0) = \varphi(x)$ и $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) = 0$, граничные условия $\bar{u}\big|_{x=0} = \bar{u}\big|_{x=L} = 0$, запишем операторное уравнение:

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2}\bar{u} = -\frac{8hp}{a^2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi nx}{L}. \quad (12)$$

Решение (12) будем искать в виде суммы однородного $\bar{u}$ и частного решения данного неоднородного $\bar{v}$ уравнения

$$\bar{u}(x,p) = \bar{u} + \bar{v}. \quad (13)$$

Однородное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2}\bar{u} = 0, \quad (14)$$

а его решение будет

$$\bar{u} = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x}. \quad (15)$$

Частное решение неоднородного уравнения (12) ищем в виде

$$\bar{v} = \tilde{C}_1\cos\frac{\pi nx}{L} + \tilde{C}_2\sin\frac{\pi nx}{L}. \quad (16)$$

Вычисляем производные

$$\bar{v}' = -\tilde{C}_1\frac{\pi n}{L}\sin\frac{\pi nx}{L} + \tilde{C}_2\frac{\pi n}{L}\cos\frac{\pi nx}{L}, \quad (17)$$

$$\bar{v}'' = -\tilde{C}_1\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\cos\frac{\pi nx}{L} - \tilde{C}_2\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\sin\frac{\pi nx}{L}. \quad (18)$$

Значения (6) и (18) подставляются в (15):

$$\left(\tilde{C}_1\cos\frac{\pi nx}{L} + \tilde{C}_2\sin\frac{\pi nx}{L}\right)\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{L^2}\right) = \frac{8hp}{a^2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi nx}{L}. \quad (19)$$

Основное влияние на значение функции оказывает первое слагаемое ряда правой части (примерно 90%). Поэтому, полагая n = 1, из (19) получим:

$$\tilde{C}_1 = 0, \quad (20)$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{8hp}{\pi^2\left(p^2 + \frac{a^2\pi^2}{L^2}\right)}. \quad (21)$$

Учитывая (20) и (21), запишем (при n=1) частное решение неоднородного уравнения (12):

$$\bar{v} = \frac{8hp}{\pi^2\left(p^2 + \frac{a^2\pi^2}{L^2}\right)}\sin\frac{\pi x}{L}. \quad (22)$$

Принимая во внимание (13), (15) и (22), имеем общее решение операторного уравнения:

$$\bar{u}(x,p) = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x} + \frac{8hp}{\pi^2\left(p^2 + \frac{a^2\pi^2}{L^2}\right)}\sin\frac{\pi x}{L}. \quad (23)$$

С учетом граничных условий выражение (23) принимает вид:

$$\overline{u}(x,p)=\frac{8hp}{\pi^2\left(p^2+\frac{a^2\pi^2}{L^2}\right)}\sin\frac{\pi x}{L}. \qquad (24)$$

Переходя к оригиналу, запишем

$$\frac{8h}{\pi^2}\frac{p}{\left(p^2+\frac{a^2\pi^2}{L^2}\right)}\doteqdot\frac{8h}{\pi^2}\cos\frac{\pi at}{L}. \qquad (25)$$

Следовательно, решение (1), (24) будет:

$$u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\cos\frac{\pi at}{L}\sin\frac{\pi x}{L}. \qquad (26)$$

ВЫВОДЫ

Получено уравнение колебаний нитей основы, находящихся в фазе заступа, и показана методика решения волнового уравнения применительно к процессу ткачества с использованием операционного исчисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* // Высшая математика – М.: Дрофа, 2003.
2. *Степанов С.Г. и др.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2004, №6. С.47…51.
3. *Данко П.Е. и др.* // Высшая математика в упражнениях и задачах. – Ч.II. – М.: Высшая школа, 1980.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 25.03.05.