УДК 687.021.531.36

К ТЕОРИИ УПРУГИХ ТЕКСТИЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК, НЕ ПОЛНОСТЬЮ ПРИЛЕГАЮЩИХ К ОХВАТЫВАЕМЫМ ИМИ ТЕЛАМ * **

Е. В. ПОЛЯКОВА, В. Я. ЭНТИН, В. А. ЧАЙКИН

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

В [1] получены дифференциальные уравнения, определяющие форму и деформации оболочки, охватывающей осесимметричное тело и не имеющей с ним контакта в его суженной части. В настоящей части работы дается решение этих уравнений и приводятся примеры расчетов для тел различной формы.

5. Общий анализ нулевого приближения. На основе уравнения (12) из [1] заключаем, что на промежутках $h_1 < z < z_1$, $z_1 < z < z_2$ и $z_2 < z < h_2$ функция $\varsigma_0(z)$ определяется равенствами, соответственно:

$$\varsigma_0(z) = C_1 z + D_1, \varsigma_0(z) = C_2 z + D_2, \varsigma_0(z) = C_3 z + D_3, \quad (1)$$

где $C_1, D_1, C_2, D_2, C_3, D_3$ – постоянные интегрирования.

Определяя эти постоянные в соответствии с условиями (14) и (16) из [1], заключаем, что

$$\varsigma_0(z) = \frac{L}{h_2 - h_1} z - \frac{L h_1}{h_2 - h_1}. \quad (2)$$

Учитывая (2), запишем определяющее функцию $r_0(z)$ уравнение (15) из [1] в виде

$$\frac{d^2 r_0(z)}{dz^2} + \frac{k_2 L^2}{k_1 R_0^2 (L - h_2 + h_1)(h_2 - h_1)} r_0(z) = 0. \quad (3)$$

Вообще говоря, высота h_2 - h_1 деформированной оболочки может превосходить длину L "недеформированной" оболочки, но может быть и меньше этой длины.

Ограничимся рассмотрением первого случая. При этом общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$r_0(z) = B_1 e^{\lambda z} + B_2 e^{-\lambda z}, \quad (4)$$

* Окончание. Начало см. в № 3 за 2005 г., продолжение в №4 за 2005 г.

** В порядке обсуждения.

где

$$\lambda=\sqrt{\frac{k_2L^2}{k_1R_0^2(h_2-h_1-L)(h_2-h_1)}},\quad (5)$$

а B_1 и B_2 – постоянные интегрирования.

Ясно, что возрастанию величины h_2 - h_1 соответствует увеличение степени растяжения меридиональных волокон оболочки. Это согласно (5) означает, что с ростом натяжения оболочки величина λ убывает.

С учетом (4) из равенств (15) и (16) из [1] получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}&B_1e^{\lambda z_{10}}+B_2e^{-\lambda z_{10}}=\delta(z_{10}),\ B_1e^{\lambda z_{20}}+B_2e^{-\lambda z_{20}}=\delta(z_{20}),\\&\lambda B_1e^{\lambda z_{10}}-\lambda B_2e^{-\lambda z_{10}}=\delta'(z_{10}),\ \lambda B_1e^{\lambda z_{20}}-\lambda B_2e^{-\lambda z_{20}}=\delta'(z_{20}),\end{aligned}\quad (6)$$

определяющие величины B_1, B_2, z_{10} и z_{20}.

Исключая из (6) B_1 и B_2, приходим к равенствам

$$\lambda^2\delta^2(z_{10})-\delta'^2(z_{10})=\lambda^2\delta^2(z_{20})-\delta'^2(z_{20}),\quad (7)$$

$$\delta(z_{10})=\frac{\lambda\delta(z_{20})+\delta'(z_{20})}{2\lambda e^{\lambda(z_{20}-z_{10})}}+\frac{\lambda\delta(z_{20})-\delta'(z_{20})}{2\lambda e^{-\lambda(z_{20}-z_{10})}},\quad (8)$$

которые служат для определения z_{10} и z_{20} в соответствии с формой тела, определяемой функцией $\delta(z)$.

6. Пример определения границ области контакта тела и оболочки. Пусть нижняя часть тела является конической, причем образующая конуса задается уравнением

$$\rho(z)=R_0+\mu(\bar{\delta}+\Delta-z\frac{\Delta}{h}),\quad (9)$$

где h – высота, на которой, по предположению, коническая часть тела переходит в цилиндрическую часть радиуса $\rho(z)\equiv R_0+\mu\bar{\delta}$; Δ и $\bar{\delta}$ – произвольно задаваемые величины, определяющие радиус основания конуса и радиус цилиндрической части тела.

В данных условиях уравнения (7) и (8) принимают вид:

$$\lambda^2(\bar{\delta}+\Delta-z_{10}\frac{\Delta}{h})^2-(\frac{\Delta}{h})^2=\lambda^2\bar{\delta}^2,\quad (10)$$

$$\bar{\delta}+\Delta-z_{10}\frac{\Delta}{h}=\frac{\bar{\delta}}{2e^{\lambda(z_{20}-z_{10})}}+\frac{\bar{\delta}}{2e^{-\lambda(z_{20}-z_{10})}}.\quad (11)$$

Из (10) имеем

$$z_{10}=\frac{h\bar{\delta}}{\Delta}+h\mp\frac{h\bar{\delta}}{\Delta}\sqrt{1+(\frac{\Delta}{\bar{\delta}h\lambda})^2}.\quad (12)$$

Перед корнем в (12) следует брать знак «минус», так как иначе выполнялось бы неравенство $z_{10}>h$, что противоречит смыслу задачи. При этом видно, что с ростом натяжения оболочки, то есть при убывании величины λ, величина z_{10} также убывает, то есть нижняя граница области отсутствия контакта оболочки и тела смещается вниз. Этот вывод вполне согласуется с опытными данными.

Из (11) легко определяем величину z_{20}, характеризующую верхнюю границу области отсутствия контакта между телом и оболочкой:

$$z_{20}=z_{10}+\frac{1}{\lambda}\ln\left(\sqrt{1+(\frac{\Delta}{\bar{\delta}h\lambda})^2}+\frac{\Delta}{\bar{\delta}h\lambda}\right)\quad (13)$$

7. Случай, когда одна из кромок оболочки лежит на границе области контакта. Анализ нулевого приближения. Пусть оболочка отделяется от тела на своей нижней кромке, то есть $h_1 = z_1$. В этом случае остаются справедливыми уравнения (2), (4) и (5).

Ясно, что граничные условия для определения постоянных интегрирования B_1 и B_2 в (4), а также величины z_{20} в данном случае получаются путем трансформации условий (15) и (16) из [1] в следующие условия:

$$r_0(z_{10}) = \delta(z_{10}), r_0(z_{20}) = \delta(z_{20}), r_0'(z_{20}) = \delta'(z_{20}). \quad (14)$$

Замечание. В рассуждениях предыдущих разделов на искомую функцию $r_0(z)$ налагались четыре условия. Два из них обеспечивали непрерывность оболочки, а два других – обеспечивали гладкость сопряжения тех частей оболочки, которые прилегают к телу, с той ее частью, которая не имеет контакта с телом.

Эти два последние условия обеспечивали также всюду гладкое сопряжение оболочки с поверхностью тела при допущении, что эта поверхность является гладкой. Три условия (14) не требуют, чтобы на кромке, принадлежащей границе области контакта, оболочка сопрягалась с телом гладко. Эти условия только обеспечивают расположение обсуждаемой кромки на заданной окружности, которая, по предположению, лежит на поверхности тела. Вследствие этого получаемые в соответствии с этими условиями решения корректны только в тех случаях, когда в окрестности данной кромки тело расширяется не в большей мере, чем это допускается оболочкой.

На основе (4) и (14), учитывая, что $z_{10} = h_1$, получаем уравнения:

$$\begin{gathered} B_1 e^{\lambda h_1} + B_2 e^{-\lambda h_1} = \delta(h_1), B_1 e^{\lambda z 20} + B_2 e^{-\lambda z 20} = \delta(z_{20}), \\ \lambda B_1 e^{\lambda z 20} - \lambda B_2 e^{-\lambda z 20} = \delta'(z_{20}), \end{gathered} \quad (15)$$

из которых имеем

$$B_1 = \frac{\lambda\delta(z_{20}) + \delta'(z_{20})}{2\lambda e^{\lambda z 20}}, B_2 = \frac{\lambda\delta(z_{20}) - \delta'(z_{20})}{2\lambda e^{-\lambda z 20}}, \quad (16)$$

$$\frac{\lambda\delta(z_{20}) + \delta'(z_{20})}{2\lambda e^{\lambda(z20-h_1)}} + \frac{\lambda\delta(z_{20}) - \delta'(z_{20})}{2\lambda e^{-\lambda(z20-h_1)}} = \delta(h_1). \quad (17)$$

Уравнение (17) определяет положение верхней границы области отсутствия контакта оболочки и тела.

Пример 2. Модифицируем пример, рассмотренный в предыдущем разделе. Будем считать, что нижняя кромка оболочки располагается в плоскости $z = z_1 = h_1 = 0$ и образует окружность радиуса $\rho(z) = R_0 + \mu(\overline{\delta} + \Delta)$, а верхняя кромка располагается на цилиндре радиусом $\rho(z) = R_0 + \mu\overline{\delta} = \text{const}$. При этом согласно (17) получаем

$$z_{20} = \frac{1}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{\Delta}{\overline{\delta}} + \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta}{\overline{\delta}}\right)^2 - 1}\right) \quad (18)$$

ВЫВОДЫ

1. Получены уравнения, позволяющие рассчитывать деформации оболочек, не всюду прилегающих к поверхности охватываемого тела.

2. Приведены примеры расчета задач о равновесии оболочек при различных условиях удержания их кромок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полякова Е.В., Энтин В.Я., Чайкин В.А.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2005, №3. С.107…110.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 04.04.05.