УДК 677- 486.2:539.311

ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ СКРУЧЕННЫХ НИТЕЙ

В.П. ЩЕРБАКОВ, Н.С. СКУЛАНОВА, О.Ю. ДМИТРИЕВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Скрученная нить представляет собой две одинаковые, вписанные одна в другую, винтовые линии, радиус осевой линии каждой из которых равен радиусу поперечного сечения нити [1]. Сечение каждой из двух нитей представляет собой круг радиусом R, а осевая линия нити – винтовую линию с углом подъема β_k и радиусом, равным радиусу поперечного сечения крученой нити, то есть тоже R.

Кривизна винтовой линии является постоянной и равна

$$k_3 = \frac{\sin^2\beta_k}{R},$$

кручение –

$$k_1 = \frac{\sin\beta_k \cos\beta_k}{R}.$$

Здесь под кручением следует понимать первую компоненту вектора Дарбу, характеризующую меру отклонения кривой от плоской формы.

Напомним, что вектором Дарбу называется вектор, который определяет вращение естественных осей при движении точки по кривой. Между нитями вдоль винтовой линии возникает контактная равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q. Последовательность точек касания образует ось крученой нити. Технология формирования крученой нити должна обеспечить равновесную структуру. Если правильно подобрать геометрические и силовые параметры процесса скручивания с учетом свойств нитей, то ось крученой равновесной нити представляет собой прямую. Линия контакта, образующая точками касания ось крученой нити, является прямой линией. Приведенная к осевой линии нити контактная нагрузка равна $q_0 = q\cos\beta_k$. Если прочность одиночной нити (компонента), равная натяжению в момент разрыва, составляет T, то прочность скрученной нити определяется равенством [6]:

$$P_k = 2\left(\frac{T}{\cos\beta_k} - \frac{q_0 R}{\cos\beta_k}\right). \quad (1)$$

Величина контактной нагрузки находится из соотношения [1]:

$$q_0 = \frac{P}{2R}\frac{\sin^2\beta_k}{\cos\beta_k} + GI_p\frac{\sin^2\beta_k}{2R^3}. \quad (2)$$

В этих двух последних выражениях совсем не упоминается о силах трения между нитями, которые, по единодушному мнению текстильщиков, увеличивают прочность скрученной нити.

Так, в учебнике [2], соавтором которого является и один из авторов данной статьи, написано: "При кручении одиночные нити обхватывают друг друга, растягиваются и осуществляют взаимное сжатие. Силы трения как между компонентами, так и между волокнами увеличиваются, что повышает разрывную нагрузку крученой пряжи".

Приведенная цитата отражает установившуюся точку зрения технологов и материаловедов на роль трения в теории прочности нити и пряжи. Однако чтобы силы трения существовали, необходимо относительное смещение взаимодействующих волокон в случае одиночной нити и компонентов для скрученной нити. У винтовой линии главная нормаль v пересекает ось нити под прямым углом и совпадает с ее радиусом. В радиальном направлении действует распределенная нагрузка интенсивностью q. Вследствие свойств винтовой линии указанная нормаль v является одновременно нормалью к поверхности второй, изогнутой по винтовой линии, нити. При деформировании крученой нити оси компонентов как были, так и остаются винтовыми. Нагрузка q всегда направлена по радиусу нити, и силам трения просто неоткуда взяться. В полной мере это относится и к одиночной нити или пряже.

Рассматривая малый элемент волокна в нити, замечаем лишь силы, действующие параллельно и перпендикулярно оси волокна [3]. Если же при этом и следует говорить о скользящих волокнах и силах трения, то совсем в ином смысле, как это многие понимают. Подробно об этом написано в учебнике [4]. Система волокон в нити или система скрученных между собой нитей является самоуплотняющейся, то есть чем больше натяжение, тем сильнее поперечное обжатие.

Роль кручения состоит в создании "монолитного" продукта, в котором волокна или нити существуют не сами по себе, а представляют собой более цельное тело, воспринимающее внешнюю нагрузку. В крученой нити наблюдается блокирование слабых мест при достаточном уровне поперечных сил, возникающих в результате кручения. Подобное явление установлено на комбинированных текстильно-металлических нитях с сравнительно небольшой круткой (около 200 и выше).

Квадратическая неровнота крученой нити в корень квадратный меньше неровноты одиночной нити. Это уменьшение достигается наложением утолщенных мест на утоненные, в результате чего продукт становится равномернее. В [4] отмечается, что прочность нити отождествляется с прочностью цепи, которая определяется прочностью ее наислабейшего звена. Таким звеном в пряже будет сечение с наименьшим числом волокон.

Интересующая нас линейная плотность пряжи является суммой большого числа независимых между собой слагаемых, каждое из которых имеет незначительные размеры по сравнению со всей суммой. В таком случае можем ожидать, что распределение данной величины мало отклоняется от нормальной формы, и с вероятностью 0,997 можем определить минимальную линейную плотность пряжи: $T_{min} = \overline{T}_{пряжи} - 3\sigma$. Здесь σ – среднее квадратическое отклонение, связанное с коэффициентом вариации C соотношением $C = \sigma\overline{T}_{пряжи}$.

Для конкретности изложения примем четырехкомпонентную аппаратную пряжу линейной плотности 124,5 текс, вырабатываемую на Купавинской тонкосуконной фабрике [5]. Так как прочность пряжи определяется при зажимной длине 500 мм, то из спектра квадратической неровноты пряжи по линейной плотности, полученного на приборе КЛА-2, выбираем значение, соответствующее полуметровым отрезкам: C=7,8%. Вычисляем T_{min}=95,37 текс.

Число волокон в этом сечении пряжи равно

$$m_0 = \frac{T_{min}}{\overline{T}} = \frac{95,37}{0,66} = 144.$$

В случае же скрученных нитей наислабейшее сечение компонента блокируется контактной нагрузкой, обусловленной винтовым расположением нитей, внешней нагрузкой и жесткостными характеристиками нити.

Найдем наислабейшее звено в нити, полученной в два сложения. Для крученой нити:

– квадратическая неровнота

$$C_k = \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}078}{\sqrt{2}} = 0{,}055\,;$$

– среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_k = 0{,}055 \cdot 124{,}5 \cdot 2 = 13{,}695\,;$$

– минимальная линейная плотность

$$T_{\min k} = 124{,}5 \cdot 2 - 13{,}695 \cdot 3 = 207{,}915\,;$$

– число волокон в наислабейшем сечении

$$m_k = \frac{207{,}915}{0{,}66} = 315\,.$$

Наименьшее число волокон одиночной пряжи в составе скрученной составляет $m = \frac{m_k}{2} = 158$. Такой же результат получаем, если принять уменьшение неровноты одиночной нити с 0,078 до 0,055. Число волокон компонентов [5]: m_1=53; m_2=41; m_3=19; m_4=45 и соответственно их жесткости $(E_iF_i)_1m_i$: E_1F_1=1263,0 сН; E_2F_2=1299,7 сН; E_3F_3=2478,2 сН; E_4F_4=2340,0 сН.

Обозначив соотношение жесткостей $e_i = \frac{E_iF_i}{E_3F_3}$, получим отношения жесткости каждого компонента к наиболее жесткому: e_1=0,510; e_2=0,524; e_4=0,944.

Прочность одиночной многокомпонентной пряжи в составе скрученной:

$$P_* = \overline{P}_в(\ell) m_3 (e_1 + e_2 + e_4 + 1) k k_c \langle \cos\vartheta \rangle =$$
$$= 16{,}9 \cdot 19 \cdot 2{,}978 \cdot 0{,}631 \cdot 0{,}971 \cdot 0{,}95 = 556{,}6 \text{ сН}.$$

Расчет прочности пряжи до скручивания [5] дает 504,5 сН. В формулу (1) прочности крученой нити входит натяжение компонента T, в момент разрыва равное прочности этого компонента P_*, но уже в составе скрученной нити.

С учетом выражения (2) прочность P_k записывается в виде

$$P_k = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\beta_k}\left(\frac{2P_*}{\cos\beta_k} - \frac{GI_p \sin^2\beta_k}{R^2\cos\beta_k}\right). \quad (3)$$

Модуль сдвига G компонента определен из теории упругости анизотропного тела [6]. Учитывая структуру нитей, а также принимая во внимание условия их формирования, нити можно с достаточным приближением к реальности рассматривать как тело, через каждую точку которого проходит ось упругой симметрии – ось вращения. Типичным элементом объема будет шестигранная призма, окружающая одно центральное волокно.

Нить обладает гексагональной симметрией, в каждой точке нити имеется одно главное направление и бесконечное множество главных направлений в плоскости, нормальной к первому. Такое тело называется трансверсально-изотропным или монотропным. В нем через все точки проходят параллельные плоскости упругой симметрии, в которых все направления являются упруго-эквивалентными (плоскости изотропии). Свойства трансверсально-изотропного материала остаются неизменными при его повороте на произвольный угол относительно оси симметрии и при любом отражении относительно плоскости, содержащей эту ось.

Зависимости между напряжениями и деформациями выражаются с помощью пяти упругих модулей. Если ось x_1 направить вдоль оси нити, то соотношения упругости для нити как трансверсально-изотропного тела запишутся в виде:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}. \quad (4)$$

Для определения компоненты матрицы жесткости $C_4 = G$ рассмотрим напряженно-деформированное состояние элемента волокна ℓ_f, выделенного из нити.

Нить подвергается сдвигу γ под действием касательных напряжений σ_{12} (в матричных обозначениях σ_4). Деформирование элемента показано на рис. 1.

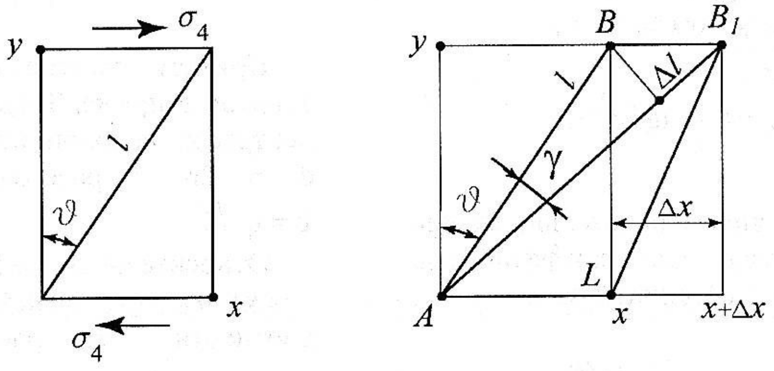

Рис.1

Стороны прямоугольника ABKL изменяют свою длину, а сам прямоугольник перекосится и превратится в параллелограмм. Углы А и В уменьшатся. Это изменение прямого угла для заданной ориентации сторон называется угловой деформацией или углом сдвига. Найдем угол, на который повернется отрезок АВ, представляющий собой волокно ℓ.

Вследствие сдвига и удлинения волокна точка В переместится вправо и отрезок АВ повернется на угол $\gamma=\frac{BB_1}{AB}\cos\vartheta=\frac{BK}{AB}\varepsilon_т\cos\vartheta$. Из рис. 1 очевидно, что $\gamma=\frac{1}{2}\varepsilon_т\sin 2\vartheta$.

Выясним связь между деформацией волокна ε_f и поперечной деформацией $\varepsilon_т$. Напишем очевидное соотношение $(\ell+\Delta\ell)^2=y^2+(x+\Delta x)^2$.

Элементарные преобразования дают

$$\left(1+\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2=\frac{y^2}{\ell^2}+\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^2\frac{x^2}{\ell^2}.$$

С учетом $\varepsilon_f=\frac{\Delta\ell}{\ell}$ и $\varepsilon_т=\frac{\Delta x}{x}$ имеем

$$1+2\varepsilon_f+\varepsilon_f^2=\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta+$$
$$+2\varepsilon_т\sin^2\vartheta+\varepsilon_т^2\sin^2\vartheta.$$

Пренебрегая квадратами деформаций, получим

$$\varepsilon_f=\varepsilon_т\sin^2\vartheta.$$

На элементарном перемещении $d(\Delta x)$ работа внешней силы P_{12} при прочих неизменных перемещениях равна $dA=P_{12}d(\Delta x)$.

Как и ранее преобразуем написанное соотношение к виду

$$\frac{M}{L}\sigma_y = \sum_1^N \frac{m_f}{\ell_f}\sigma_{sf}\frac{\ell_f \partial\varepsilon_f}{d(\Delta x)}.$$

Так как $\gamma = \frac{\Delta x}{\ell_f}\cos\vartheta$, то с учетом $\ell_f = \frac{L}{\cos\vartheta}$ получаем

$$\Delta x = \frac{\gamma L}{\cos^2\vartheta} = \frac{\varepsilon_T \sin\vartheta\cos\vartheta L}{\cos^2\vartheta} = \frac{L\varepsilon_T}{tg^2\vartheta}.$$

Постоянная C_{44} представляет собой коэффициент пропорциональности между напряжением σ_4 и углом сдвига γ:

$$\sigma_4 = \left\langle \frac{E_f}{v} tg^2\vartheta \right\rangle \gamma.$$

После усреднения окончательно можно написать формулу для коэффициента сдвига G, равного постоянной C_{44}:

$$C_{44} = G = E_f \frac{tg^2\beta}{2v}. \quad (5)$$

Модули упругости волокон смеси определены из эксперимента. В нашем случае получаем: компонент 1, шерсть мериносовая 64/70 качества I – II длины – E_1=641,38 МПа; компонент 2, шерсть мериносовая 64 качества II длины – E_2=762,96 МПа; компонент 3, шерсть козья ангорская импортная L7900 – E_3=1175МПа; компонент 4, капроновое волокно – E_4=1665 МПа.

Модуль упругости волокна E_f определяется достаточно точно по правилу смесей:

$$E_f = 0{,}338E_1 + 0{,}257E_2 + 0{,}123E_3 + \\ + 0{,}282E_4 = 1024 \text{ МПа}.$$

Тогда в соответствии с формулой (5) модуль сдвига одиночной нити принимает значение G = 261,3 МПа.

Для вычисления полярного момента инерции пряжи используем принцип параллельного переноса осей. Примем центр тяжести сечения пряжи за начало координат x0y и поместим одно волокно в начало координат. Тогда для любого другого i-го волокна осевые моменты инерции с учетом того, что оси центральные, равны

$$I_{Xi} = \frac{\pi d_f^4}{64} + b^2F,\ I_{Yi} = \frac{\pi d_f^4}{64} + a^2F. \quad (6)$$

Полярный момент инерции равен сумме осевых моментов всех m волокон:

$$I_p = \sum_{i=1}^m (I_{Xi} + I_{Yi}). \quad (7)$$

Примем гексагональное расположение волокон в пряже. Тогда расстояние между центрами волокон по горизонтали равно $d_f = 2r_f$, а расстояние по вертикали $b = r_f\sqrt{3}$.

Относительное содержание волокон в пряже k_o при максимально возможной плотности их расположения равно $k_{o\,max} = \frac{\frac{\pi r_f^2}{2}}{2\sqrt{3}} = 0{,}907$.

При построении сечения пряжи из сечений волокон при фактическом значении k_o допустим, что сечение пряжи полностью заполнено условными волокнами увеличенного диаметра r_y. Тогда условный радиус $r_y = r_f\sqrt{\frac{0{,}907}{k_o}}$.

Составлена программа на языке MATLAB, которая размещает определенное число волокон при заданном коэффициенте относительного содержания k_o и рассчитывает полярный момент инерции. В нашем случае I_p = 0,0027 мм^4, а жесткость нити при кручении равна GI_p = 0,70 Н·мм^2. Заметим, что вычисленный в предположении сплошной нити момент инерции равен 0,00965, превосходящий I_p в 3,58 раза.

Вычисленная по формуле (3) прочность крученой нити составляет P_k = 10,552 Н при действительной прочности 10,160 Н, что дает относительную ошибку менее 4%. Если принять во внимание, что прочность одиночной нити до скручивания равна 504,5 сН и коэффициент упрочнения скрученной пряжи принимает значение 1,05, то в целом можно считать полученный результат соответствующим реальным данным. Расчет контактной нагрузки в момент разрыва скрученной пряжи по формуле (2) дает $q_0 = 1{,}05\frac{Н}{мм}$.

Даже при отсутствии внешней нагрузки в крученой нити имеется контактное взаимодействие между нитями, равное $q_{00} = 313{,}3\frac{сН}{мм}$ и натяжение каждого из компонентов $T_0 = 88{,}1$ сН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков В.П.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №3, №5.
2. Механическая технология текстильных материалов. Учеб. для вузов/А. Г. Севостьянов, В.П. Щербаков и др. – М.: Легпромбытиздат, 1989.
3. *Hearle J. W. S., Grosberg P., Backer S.* Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. – New York, 1969.
4. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити. – М.: РИО МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2001.
5. *Щербаков В.П., Скуланова Н.С.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2005, №2.
6. *Щербаков В.П., Цыганов И.Б., Заваруев В.А.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности.– 2003, №6; 2004, №1.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 20.05.05.