УДК 677.08.021

# ДЕФОРМАЦИЯ КОМПЛЕКСА ИЗ ВОЛОКОН НА СЪЕМНОМ ВАЛИКЕ В ПРОЦЕССЕ СЪЕМА

*Д. ЭНХТУЯ, П. БААСАНСУРЭН*

**(Монгольский университет науки и техники)**

Технологический процесс обработки разнородного волокнистого сырья из отходов ости и пуха на съемном круговом зубчатом цилиндре будем рассматривать в виде сплошной волокнистой среды, состоящей из отдельных отрезков, связанных между собой.

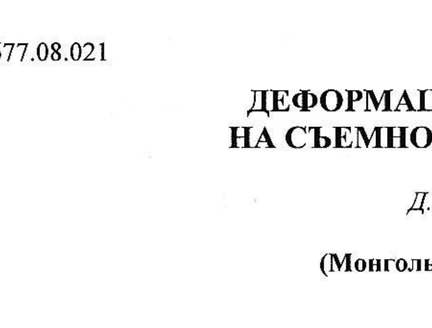


Рис. 1

Несжимаемый воздушный поток проходит относительно цилиндра 1 параллельно оси x со скоростью U на бесконечности (рис. 1 – схема взаимодействия зубчатого цилиндра и кожуха). Граничное условие состоит в том, что функция тока $\psi$ постоянна на твердой стенке кожуха 2 (рис. 1) и поэтому имеет одно и то же значение на плоскости, параллельной оси x, и на поверхности цилиндра при сближении кожуха 2 и уменьшении зазора $y_1$. Для больших $|z|$ комплексный потенциал $\omega$ должен стремиться к $U_z$.

Положив $z = A/\zeta$ видим, что ось x переходит в ось $\xi$. Окружность переходит в прямую, параллельную оси $\xi$, которую можно определить, взяв z=2ia, откуда $\zeta = -iA/2a$. При этом выбираем A так, чтобы это значение $\zeta$ стало равным $i\pi/2$, то есть A=-$\pi$a. Тогда $z = -\dfrac{\pi a}{\zeta}$.

Если $z \to \infty$, то $\omega$ стремится к $U_z = -\pi a U/\zeta$, что соответствует дипольному источнику в начале координат, чтобы $\omega$ стало действительным на границах $\eta = 0$ и $\eta = i\pi/2$. Для $\eta = 0$ это выполняется автоматически, а для $\eta = i\pi/2$ достигается прибавлением $-\pi a U/(\xi - i\pi)$.

Эта функция аналитическая при $0 \le \eta \le \pi/2$ и поэтому допустима. Однако данная функция нарушает условие при $\eta = 0$ и поэтому необходимо прибавить еще $-\pi a U/(\xi + i\pi)$.

Прибавление идет до тех пор, пока f(z) не имеет других особых точек, кроме конечного числа полюсов и ограничена на бесконечности. Функция f(z) с точностью до аддитивной постоянной является суммой главных частей разложения в окрестности полюсов с контуром C, который охватывает все полюса функции $f(t)/(t-2)$. Поскольку f(z) при большом числе t ограничена, интервал равен конечной величине – фиксированному числу R при всех $|z| > R$, так как f(z) обращается в бесконечность в некоторых точках вне любого заданного контура.

Делая контуры $C_m$ все больше и больше, мы охватываем все больше полюсов и добавляем к сумме все больше членов, а интервал в итоге даст остаточный член. Если он стремится к нулю, то при $R_m \to \infty$ сумма сходится и становится равной f(z), что отражается следующей формулой:

$$\left| \int_{C_m} \frac{zf(t)}{t(t-2)} dt \right| < \frac{M|z| \cdot 2\pi \cdot 2}{R_m - |z|} \to 0. \qquad (1)$$

Таким образом,

$$f(z) = f(0) + \lim\{P_m(z) - P_m(0)\}, \qquad (2)$$

где $P_m(z)$ – сумма главных частей f(z) по всем полюсам $\alpha$ внутри $C_m$.

Если при z=0 функция является аналитической и не имеет других особенностей, кроме полюсов, при конечных z, и если можно выбрать последовательность контуров $C_m$, охватывающих z=0 и стремящихся к бесконечности таким образом, что $|f(z)|$ никогда не превосходит данной величины M ни на одном из этих контуров, а $a\int\left|dz/z\right|$ равномерно ограничен на них, то справедливо выражение (2).

Используя вышесказанное, получаем

$$\omega = -\pi a U\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta - i\pi} + \frac{1}{\zeta + i\pi} + \frac{1}{\zeta - 2i\pi} + \frac{1}{\zeta + 2i\pi} \ldots\right) = -\pi a U \mathrm{cth}\zeta = \pi a U \mathrm{cth}\frac{\pi a}{z}.$$

Этот ряд действителен при z=x и стремится к $U_z$ при $|z| \to \infty$, что и требовалось определить. На окружности цилиндра радиус-вектор равен $2i\sin\theta$, а

$$z = 2a\sin\theta e^{i\theta}, \quad \zeta = -\frac{1}{2}\pi \mathrm{cosec}\theta e^{-i\theta} = -\frac{1}{2}\pi(\mathrm{ctg}\theta - i),$$

$$\omega = -\pi a U \mathrm{cth}\left(\frac{1}{2}\pi i - \frac{1}{2}\pi \mathrm{cty}\theta\right) = \pi a U \mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\pi \mathrm{ctg}\theta\right),$$

откуда $\omega$ действительно, а скорость определяется из выражения

$$U = \left|\frac{d\omega}{dz}\right| = \left|\frac{U\pi^2 a^2}{z^2 Sh^2\, \pi a/z}\right|.$$

Если z действительно и стремится к нулю, то $U \to 0$. Отсюда следует, что линейная скорость воздуха относительно подвижного цилиндра равна нулю на линии касания цилиндра с осью x, движущегося с такой же линейной скоростью.

В верхней точке окружности $z = 2ia$, $\zeta = i\pi/2$, откуда

$$U_в = \left|\frac{1}{4}\pi^2 U \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}\pi\right| = \frac{1}{4}\pi^2 U.$$

Таким образом, скорость воздуха над цилиндром будет примерно в 2,5 раза больше скорости в бесконечности, а давление соответственно меньше. Следовательно, подъем волокон по разным аэродинамическим характеристикам и весу может регулироваться при изменении зазора $y_1$ и плотности волокон на зубчатом цилиндре.

Рассматривая трехмерное геометрическое тело, образованное из поверхности $\sum\limits_0$, в каждой точке проведем внешнюю нормаль и отложим в ее направлении отрезок $h/2$, где величина h может быть переменной толщины в зависимости от плотности волокон на зубчатом цилиндре и зависеть от $a^1$, $a^2$.

Проведем аналогичным способом внутреннюю нормаль в каждой точке $\sum\limits_0$ и отложим в ее направлении отрезок такой же длины. Концы этих отрезков лежат на поверхности $\sum\limits_-$. Тело, лежащее между поверхностями $\sum\limits_+$ и $\sum\limits_-$, называется оболочкой со срединной поверхностью $\sum\limits_0$ [1].

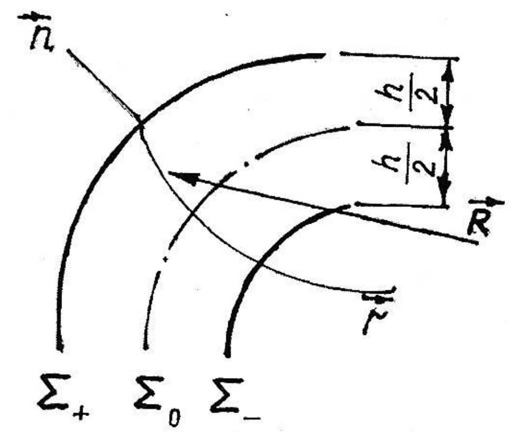


Рис. 2

Ввиду того, что практически h – суммарная величина гарнитуры и плотности волокнистого материала, а D – диаметр поверхности $\sum\limits_0$, равный по величине зубчатому цилиндру, с четким обоснованием h<<D. Тогда любой точке оболочки может быть поставлен в соответствие радиус-вектор $\vec{R}$ (рис. 2 – трехмерное геометрическое тело):

$$\vec{R} = \vec{r} + z\vec{n}, \quad -\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}. \tag{3}$$

После преобразования этого уравнения по $a^/$ получим

$$\vec{R}_I = \vec{r} + z\vec{n} = \left(\delta_I^к - в_I^к z\right)\vec{r}_к, \tag{4}$$

где $\vec{R}_I$ – вектор локального базиса, описываемый радиусом-вектором $\vec{R}$.

Тогда фундаментальная матрица $G_{IJ}$ произвольной точки оболочки имеет вид

$$G_{IJ} = \vec{R}_I R_J = g_{IJ} - 2zв_{IJ} + z^2 в_I^к в_{кJ}. \tag{5}$$

Приведем симметричный тензор $в_{IJ}$ к главным осям и обозначим его главные значения $в_{11}^*$ и $в_{12}^*$ следующим образом:

$$в_{11}^* = \frac{1}{\rho_1}, \quad в_{12}^* = -\frac{1}{\rho_2}, \tag{6}$$

где $\rho_a, \beta=1,2$ – радиусы главных изгибов кривизны.

В связи с тем, что оболочка тонкая, выполняется условие

$$\left|\frac{z}{\rho_\beta}\right| << 1, \ \beta=1,2. \qquad (7)$$

Для тонких оболочек последним слагаемым в правой части выражения (5) можно пренебречь, тогда получим

$$G_{IJ} = g_{IJ} - 2z\text{в}_{IJ}. \qquad (8)$$

После деформирования радиус-вектор $\vec{R}'$ произвольной точки оболочки зависит от трех параметров $a^1$, $a^2$ и z:

$$\vec{R}^1 = \vec{R}' \ (a^1, a^2, z), \quad -\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}. \qquad (9)$$

При z=0 получим

$$\vec{R}^r\left(a^1, a^2, 0\right) = \vec{r}\left(a^1, a^2\right). \qquad (10)$$

Кинематические гипотезы всех теорий оболочек заключаются в выборе априорного представления радиуса-вектора (9), которое разлагают в тот или иной ряд по степеням z и оставляют некоторые члены этого разложения. Если оставить лишь первую степень z, то имеем

$$\vec{R}' = \vec{r}' + zc', \qquad (11)$$

где $c'$ – некоторый вектор.

Согласно теории Кирхгофа-Лява

$$\vec{c} = \vec{n}'. \qquad (12)$$

Кинематические характеристики теории Кирхгофа-Лява связаны с вектором перемещений $\vec{u}$, который в любой точке оболочки равен

$$\vec{u} = \vec{R}' - \vec{R}. \qquad (13)$$

С учетом выражений (11) и (12) запишем

$$\vec{u}' = \vec{r}' + z\vec{n}' - \vec{r} - z\vec{n} = \vec{u} + z\left(\vec{n}' - \vec{n}\right). \qquad (14)$$

Приняв во внимание, что

$$\vec{n}' = \vec{n} + \vec{\psi}, \qquad (15)$$

из выражения (14) получаем

$$\vec{u}' = \vec{u} + z\vec{\psi}. \qquad (16)$$

Векторы Ренера в произвольной точке оболочки после ее деформирования из (11) и (12) получаем в виде

$$\vec{R}' = \vec{r}_I' + z\vec{n}' = \vec{r}' - z\text{в}_I^J\vec{r}_J'. \qquad (17)$$

Тогда фундаментальная матрица $G_{IJ}'$ имеет вид

$$G_{IJ} = \vec{R}_I R_J = g_{IJ}' - 2z\text{в}_{IJ}' + z^2\text{в}_I'\text{в}_{\kappa J}. \qquad (18)$$

Для тонких оболочек последним слагаемым в (18) можно пренебречь в связи с (7):

$$\left|z\text{в}_I'^{\kappa}\right| \le 1.$$

Тогда вместо (18) имеем

$$G_{IJ} = g_{IJ}' - 2z\text{в}_{IJ}'. \qquad (19)$$

Компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{IJ}'$ для произвольной точки оболочки равны

$$\varepsilon_{IJ}' = \frac{1}{2}\left(G_{IJ}' - G_{IJ}\right) = \frac{1}{2}\left(g_{IJ}' - g_{IJ}\right) - z\left(\text{в}_{IJ}' - \text{в}_{IJ}\right), \qquad (20)$$

а с учетом компоненты тензора деформаций и деформированного состояния $g'_{IJ}$:

$$\varepsilon'_{IJ} = \frac{1}{2}\left(g'_{IJ} - g_{IJ}\right) = \frac{1}{2}\left(\mu_{IJ} + \mu_{IJ} + \mu_I^{\kappa}\mu_{\kappa I} + \psi_I\psi_J\right) \qquad (21)$$

и

$$в'_{IJ} = в_{IJ} - \chi_{IJ}, \qquad (22)$$

где $\chi_{IJ}$, $в'_{IJ}$ – соответственно тензоры исправлений и кривизны.

В результате получим

$$\varepsilon'_{IJ} = \varepsilon_{IJ} + \chi_{IJ}, \qquad (23)$$

В связи с тем, что тензор деформаций произвольной точки оболочки должен быть трехмерным, в дополнение к компонентам $\varepsilon'_{IJ}$ найдем компоненты $\varepsilon'_{I3}$, с учетом $\vec{R}'_{33} = \vec{n}' = \vec{n} + \vec{\psi}$, $\vec{R}_3 = \vec{n}$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} G_{33} &= \vec{R}'_3\vec{R}_3 = 1, \\ G_{I3} &= \vec{R}'_I\vec{R}'_3 = \left(\vec{r}'_I + z\vec{n}'_I\right)\vec{n}'_I = 0, \\ G_{I3} &= \vec{R}'_I\vec{R}'_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Поэтому

$$\varepsilon'_{33} = \frac{1}{2}\left(G'_{33} - G_{33}\right) = 0, \qquad (25)$$

$$\varepsilon'_{I3} = \frac{1}{2}\left(G'_{I3} - G_{IJ}\right) = 0. \qquad (26)$$

Соотношение (25) показывает, что в теории оболочек Кирхгофа-Лява «обжатие» отсутствует. Из соотношения (26) следует, что в этом случае отсутствует и межслойный сдвиг.

Следовательно, для достижения межслойного сдвига волокнистого текстильного материала, находящегося на периферии зубчатого цилиндра, необходимо создать технологические условия для преодоления межволокнистых связей при удовлетворении уравнений равновесия в напряжениях.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов ИГТА. Поступила 07.10.05