

УДК 677.052.94

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ РАДИУСА КРИВИЗНЫ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПЛАНКИ, НАГРУЖЕННОЙ ДАВЛЕНИЕМ**

*Г.И. ЧИСТОБОРОДОВ, В.А. АВРЕЛЬКИН, И.Г. ЧИСТОБОРОДОВ*

(Ивановская государственная текстильная академия)

Современные условия развития экономики отрасли диктуют определенные правила деятельности предприятий. Для успешного функционирования организации необходимым условием является своевременная переориентация и адекватная реакция на изменение конъюнктуры рынка.

Большие объемы выработки одного ассортимента продукции ушли в прошлое. В настоящее время предприятиям приходится работать с небольшими партиями и разной номенклатурой изделий, что требует постоянной корректировки параметров технологического оборудования.

В связи с вышесказанным цель настоящей статьи заключается в разработке мероприятий, направленных на мобильное изменение технологических параметров процесса вытягивания и его аналитическое исследование при формировании продуктов из различных видов волокон с различными линейными плотностями.

Предметом исследования являлся двухремешковый вытяжной прибор машин прядильного производства.

В проведенных ранее исследованиях [1] была доказана целесообразность применения в зонах вытяжного прибора изогнутого поля вытягивания, которое образуется за счет использования криволинейных планок с заданным законом изменения профиля поверхности. Необходимое для удержания волокон от преждевременного перехода на скорость вытягивающей пары поле сил трения образуется при использовании криволинейных планок, меридиональное сечение которых является логарифмической спиралью.

Наши исследования доказали необходимость изменения профиля планки при изменении линейной плотности вырабатываемого продукта.

Научно обоснованные методы расчета и проектирования технологического устройства для вытяжного прибора, применяемые нами, базируются на использовании аналитических и экспериментальных методов силового взаимодействия волокнистого продукта с органами вытяжного прибора.

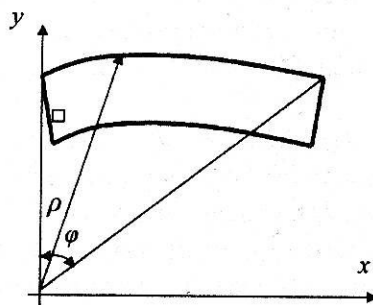


Рис. 1

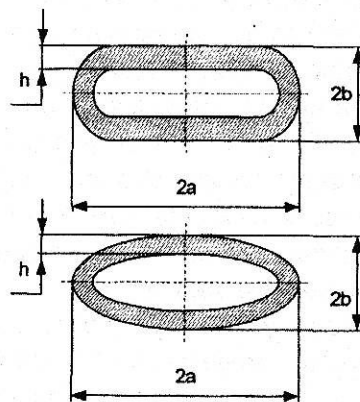


Рис. 2

На рис. 1 изображена криволинейная планка, меридиональное сечение которой представляет собой логарифмическую спираль, причем планка является полой. Поперечное сечение криволинейной планки исполнено в двух видах – плоскоовальное и эллиптическое (рис.2).

Проведем исследование для плоскооального поперечного сечения планки. Криволинейная планка связана со средством для подачи сжатого воздуха. Под действием давления  $p$  в теле планки возникает продольно растягивающее напряжение. Это напряжение распределено по сечению планки пропорционально толщине стенок  $h$  и вызывает удлинение волокон. Планка выполнена из вязкоупругого материала, подчиняющегося закону Гука. В основе исследования лежит приближенный энергетический метод Ритца.

Равновесное положение криволинейной планки, нагруженной давлением, определяется из условия минимума полной потенциальной энергии, которая равна сумме потенциальной энергии деформаций и энергии положения внешних сил.

Величина потенциальной энергии деформаций зависит от искривления контура продольного сечения планки и относительного угла его поворота.

Энергия положения сил определяется произведением давления на изменение объема внутренней полости планки. Из условия минимума полной потенциальной энергии можно найти связь между нагрузкой (давлением) и деформацией планки, а также определить перемещение ее конца.

Решение поставленной задачи проводится в рамках следующих гипотез.

1. Все участки планки, выделенные сечениями, нормальными к центральной оси, находятся в одинаковых условиях.

2. Толщина стенки планки мала по сравнению с малой полуосью сечения.

3. Сечение планки симметрично относительно осей  $x$  и  $y$ .

Произведем силовой анализ при действии равномерно распределенного давления в полости планки. Двумя нормальными сечениями выделим участок планки с центральным углом  $d\theta$ . Продольными сече-

ниями выделим из него бесконечно малый элемент, который находится в плоскооальном напряженном состоянии. Удельная потенциальная энергия  $u$  при двухосном напряженном состоянии выражается через компоненты деформации [2]:

$$u = \frac{E}{2(1-\mu^2)} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\mu\epsilon_1\epsilon_2), \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости материала планки;  $\mu$  – коэффициент Пуассона материала;  $\epsilon_1, \epsilon_2$  – относительные деформации в направлении главных нормалей.

Потенциальная энергия бесконечно малого элемента равна:

$$dU = u dv, \quad (2)$$

где

$$dv = \rho(\varphi) d\theta ds dz. \quad (3)$$

Потенциальная энергия деформации  $U$  планки с центральным углом  $\gamma$  определяется интегрированием величины  $dU$  по объему планки:

$$U = \frac{E\rho(\varphi)\gamma}{2(1-\mu^2)} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^s (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\mu\epsilon_1\epsilon_2) ds dz \quad (4)$$

где  $h$  – толщина стенки;  $s$  – длина дуги средней линии контура сечения.

Продольную и поперечную деформации находим [2]:

$$\epsilon_1 = \frac{w - y \frac{\Delta\gamma}{\gamma}}{\rho(\varphi)},$$

$$\epsilon_2 = z\Delta\chi,$$

где  $w$  – перемещение произвольной точки вдоль главной оси планки;  $\frac{\Delta\gamma}{\gamma}$  – относительный угол поворота концевой сечения

планки;  $\Delta\chi$  – изменение кривизны в произвольной точке среднего контура сечения.

Подставляя их в (4) и осуществляя интегрирование по переменной  $z$ , получаем:

$$U = \frac{Eh\gamma}{2\rho(\varphi)(1-\mu^2)} \int_0^s \left[ \left( w - y \frac{d\gamma}{\gamma} \right)^2 + \frac{(\rho(\varphi)h\Delta\chi)^2}{12} \right] ds. \quad (5)$$

В данном исследовании внешними для планки будут силы давления, поэтому работа  $T$  внешних сил на возможных перемещениях будет равна в нашем случае произведению давления на изменение объема внутренней полости планки:

$$T = p\Delta V. \quad (6)$$

Изменение объема  $\Delta V$  можно подсчитать как произведение изменения площади  $\Delta f$ , ограниченной средней линией контура, на длину  $\rho(\varphi)\gamma$  центральной оси планки:

$$\Delta V = \Delta f \rho(\varphi) \gamma. \quad (7)$$

Энергия положения внешних сил равна работе  $T$ , взятой с обратным знаком, если считать энергию положения в ненагруженном состоянии равной нулю.

Полная потенциальная энергия определяется как сумма потенциальной энергии деформации и энергии положения внешних сил, то есть:

$$\mathcal{E} = U + (-T). \quad (8)$$

Подставив выражения (5) и (6) в (8), получим:

$$\mathcal{E} = \frac{Eh\gamma}{2\rho(\varphi)(1-\mu^2)} \int_0^s \left[ \left( w - y \frac{d\gamma}{\gamma} \right)^2 + \frac{(\rho(\varphi)h\Delta\chi)^2}{12} \right] ds - p\Delta f R \gamma. \quad (9)$$

Для изучения изменения радиуса кривизны криволинейной планки необходимо определить изменение центрального угла  $\frac{\Delta\gamma}{\gamma}$ , выражая его из уравнения (9).

В соответствии с методом Ритца величины  $w$  и  $\frac{\Delta\gamma}{\gamma}$  должны обращать энергию  $\mathcal{E}$  в минимум [3], то есть:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w} = \frac{2Eh\gamma}{\rho(\varphi)(1-\mu^2)} \left[ \frac{2A_1}{m^2} w_0 - 2b \frac{A_2}{m} \frac{\Delta\gamma}{\gamma} + \frac{\chi^2}{6} \frac{n}{m^2} w_0 \right] - 2p \frac{n}{m} a \left( 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right) \rho(\varphi) \gamma = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \left( \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \right)} = \frac{2Eh\gamma}{\rho(\varphi)(1-\mu^2)} \left[ -2b \frac{w_0}{m} A_2 + 2b^2 A_3 \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \right] = 0, \quad (11)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{s}{4}} w^2 ds, \quad A_2 = \frac{1}{ab} \int_0^{\frac{s}{4}} yw ds, \quad A_3 = \frac{1}{ab^2} \int_0^{\frac{s}{4}} y^2 ds.$$

Совместное решение уравнений (10) и (11) приводит к следующему результату:

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = p \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\rho(\varphi)^2}{bh} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{\alpha}{\beta + \chi^2}, \quad (12)$$

где  $\chi = \frac{\rho(\varphi)h}{a^2}$ .

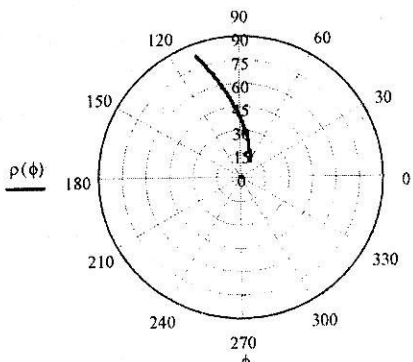


Рис. 3

Как сказано выше, радиус кривизны криволинейной планки изменяется согласно закону (рис.3):

$$\rho(\varphi) = r^\varphi. \quad (13)$$

Длина планки ограничивается разводкой между вытяжными парами. В настоящей работе длина планки определена таким образом, чтобы волокнистый продукт, скользящий по ее поверхности, максимально располагался по всей длине:

$$\rho(\varphi) = \begin{cases} r^{\varphi_1} & \varphi = \varphi_1 = \frac{1}{3}\pi, \\ r^{\varphi_2} & \varphi = \varphi_2 = \frac{11}{18}\pi. \end{cases} \quad (14)$$

Кроме геометрических размеров трубки (параметры  $a$ ,  $b$ ,  $h$ ) в ходе решения задачи необходим учет коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , ко-

торые зависят от отношения полуосей сечения  $a/b$ . Величины этих коэффициентов являются справочными и берутся из таблиц [3].

Для удобства дальнейших вычислений изменим систему координат следующим образом:

$$\gamma = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (15)$$

Формула радиуса кривизны нейтральной оси планки примет следующий вид:

$$\rho(\theta) = \begin{cases} r^{\theta+\varphi_1} & 0 \leq \theta \leq \gamma, \\ r^{\theta+\varphi_2} & \theta = 0. \end{cases} \quad (16)$$

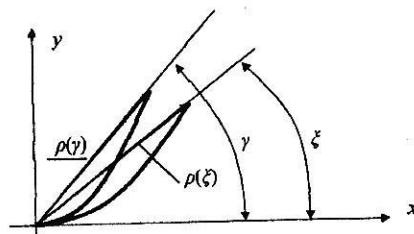


Рис. 4

Под действием давления свободный конец трубки перемещается на величину  $\lambda$ . При этом угол  $\gamma$  изменяется на величину  $\xi$  (рис.4 – изменение положения оси планки при подаче давления), а радиус кривизны  $\rho(\gamma)$  на  $\rho(\xi)$ .

Если рассматривать малый элемент трубки  $ds$  с углом  $d\theta$ , то можно считать, что:

$$\rho(\theta) = \rho(\theta+d\theta). \quad (17)$$

Тогда относительное изменение угла поворота сечения элемента  $\Delta d\theta_{d\theta}$  можно записать в виде:

$$\Delta d\theta_{d\theta}(\theta) = p \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\alpha}{bh} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{\rho(\theta)^2}{\beta + \left(\frac{\rho(\theta)h}{a^2}\right)^2}. \quad (18)$$

Изменение кривизны элемента трубки вследствие деформации можно рассчитать по формуле:

$$\Delta K_{d\theta}(\theta) = \frac{\Delta d\theta_{d\theta}(\theta)}{\rho(\theta)}. \quad (19)$$

Тогда изменение кривизны планки вследствие деформации вычислится с помощью выражения

$$\Delta K = \int_0^{\theta} \Delta K_{d\theta}(\theta) d\theta. \quad (20)$$

$$\rho_2(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{1 - \Delta K(\theta)\rho(\theta)} = \frac{\rho(\theta)}{1 - \rho(\theta) \int_0^{\theta} p \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{\alpha}{bh} \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\rho(\theta)^2}{\beta + \left( \frac{\rho(\theta)h}{a^2} \right)^2} d\theta}. \quad (22)$$

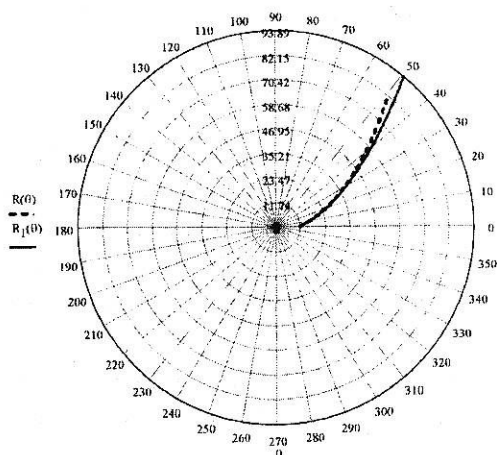


Рис. 5

На рис. 5 представлены графики изменения радиуса кривизны криволинейной планки со следующими числовыми данными:  $a = 15$  мм;  $b = 5$  мм;  $h = 1,5$  мм;  $\alpha = 0,48$  (плоскоовальное сечение);  $\beta = 0,121$ ;  $E = 0,91 \cdot 10^5$  МПа (латунь);  $\mu = 0,42$  при установке давления  $p = 5$  МПа.

Разработанная нами математическая модель получила свое подтверждение в практических условиях. Эксперименты, проведенные для различных диапазонов радиуса кривизны планок, установленных в зонах исследуемого вытяжного прибора

В то же время изменение кривизны планки можно определить следующим образом:

$$\Delta K = \frac{1}{\rho_1(\theta)} - \frac{1}{\rho_2(\theta)}, \quad (21)$$

где  $\rho(\theta)$  и  $\rho_2(\theta)$  – начальный и конечный радиус исследуемого элемента планки.

Приравнявая (20) и (21), получим общее выражение для определения изменения кривизны криволинейной планки  $\rho_2(\theta)$ , установленной в зоне вытяжного прибора при подаче давления в ее полость:

при вытягивании волокнистых продуктов различных линейных плотностей (ровница  $T_L = 200 - 600$  текс), показали эффективность использования предложенной модели.

## ВЫВОДЫ

Получена математическая зависимость, которая может быть использована при анализе и моделировании процесса вытягивания волокнистого продукта различных линейных плотностей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чистобородов Г.И., Аврелькин В.А. Теоретическое обоснование повышения эффективности процесса вытягивания в прядении. – Иваново: ИГТА, 2004.
2. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. – Изд. 2-е. – М.: Гостехиздат, 1957.
3. Андреев Л.Е. Упругие элементы приборов. – М.: Машгиз, 1981.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 03.10.05.