

ДЕФОРМАЦИЯ ОДНОРОДНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ ВОЛОКОН, СВЯЗАННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ

Д.ЭНХТУЯ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Технологический процесс обработки волокнистого сырья представляет собой регенерацию смеси, способствует отделению от нее остевых волокон и увеличивает концентрацию пуха при непрерывной циркуляции потока из волокон. Обычно циркуляцией называется криволинейный интеграл векторного поля, взятый по замкнутому контуру. Если же контур не замкнут, то этот интеграл называется линейным.

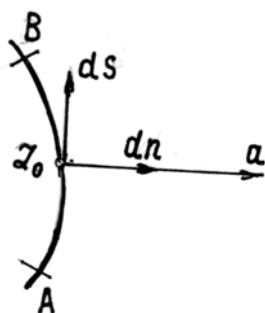


Рис. 1

Пусть M – переменная точка дуги AB (рис.1); n – векторная функция точки M . Циркуляцией вектора n по дуге AB является значение криволинейного интеграла $\int_A^B adn$ (криволинейный интеграл берется от A скалярного произведения). Пусть $F(\zeta)$ – аналитическая функция и

$$z = f(\zeta), \quad \omega = F(\zeta) = \varphi + i\Psi. \quad (1)$$

Тогда ω – аналитическая функция z . Следовательно, φ и ψ , как функции от x и y , удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа. Если одна из них постоянна на преобразованной кривой в плоскости ζ , то она постоянна и на преобразованной кривой в плоскости z . Найдя решение уравнения Лапласа в какой-нибудь области плоскости ξ, η , постоянное на ее границе, и выразив ту же функцию через x и y , получаем

решение уравнения Лапласа, постоянное на преобразованной границе. Благодаря этому с помощью конформных отображений решается множество задач; каждая аналитическая функция увеличивает их число.

Если через $d\sigma$ обозначить элемент площадки на плоскости ζ , а через ds – на плоскости z , то из соотношений Коши Римано следует

$$ds = \frac{(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}, \quad d\sigma = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 d\sigma.$$

Величина $|dz/d\zeta|$ называется модулем, или коэффициентом растяжения этого отображения.

Если ζ описывает кривую, то близким точкам, находящимся слева и справа от нее, на плоскости z соответствуют точки, находящиеся соответственно слева и справа от кривой z . Это следует из того, что отображение сохраняет направление вращения. Расстояния этих точек от кривой умножаются на $|dz/d\zeta|$. Если ω имеет логарифмическую особенность в обыкновенной точке ζ_0 плоскости ζ , то

$$\omega = A \ln(\zeta - \zeta_0) + g(\zeta) = A \ln \frac{z - z_0}{f'(\zeta)} + G(z),$$

где $g(\zeta)$ и $G(z)$ – аналитические функции. Поэтому ω имеет и в плоскости z логарифмическую особенность с тем же коэффициентом.

При интерпретации комплексного потенциала исходим из аналитической функции (1):

$$\omega = \varphi + i\psi,$$

где φ – потенциал скорости; ψ – функция тока.

Тогда

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y} = u - iv,$$

где u и v – компоненты скорости, а

$$\left| \frac{d\omega}{dz} \right| = (u^2 + v^2)^{1/2} = v_p,$$

откуда имеем результирующую скорость.

Рассматривая кривую, соединяющую А и В, получим

$$\int_A^B \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = \int_A^B \frac{\partial\psi}{\partial s} ds = \left| \psi \right|_A^B = \int_A^B u dy - v dx,$$

где $\left| \psi \right|_A^B$ представляет собой поток волоконвоздушной смеси через кривую, отнесенный к единице длины цилиндра с образующими, перпендикулярными к плоскости x, y .

Направления ds и dn ориентированы в соответствии с рис. 1, а линейный источник в точке z_0 , выпускающий волоконвоздушную смесь со скоростью $2\pi m$ на единицу длины, равный образующей цилиндра, имеет комплексный потенциал $m \ln(z - z_0)$.

В случае линейного источника волоконвоздушной смеси при $z = z_0$ в области, ограниченной двугранным углом $n\pi$, комплексный потенциал, соответствующий такому источнику волоконвоздушной смеси, равен

$$\omega_0 = -\frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0),$$

при этом комплексный потенциал для ζ :

$$\omega\zeta = -\frac{m}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0),$$

поскольку z_0 – обыкновенная точка преобразования.

Тогда функция тока:

$$\psi_0 = -\frac{m}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0}.$$

Необходимо, чтобы полная функция тока была постоянна при $\eta_0 = 0$.

Но функция тока будет удовлетворять этому условию, если прибавить к ней функцию, которая получится из нее заменой η_0 на $-\eta_0$, тогда

$$\omega = -\frac{m}{2\pi} \ln[(\zeta - \zeta_0 - i\eta_0)(\zeta - \zeta_0 + i\eta_0)]$$

удовлетворяет всем условиям:

$$\omega = -\frac{m}{2\pi} \ln\left[\left(z^{1/n} - z_0^{1/n} \right) \left(z^{1/n} - z_0^{*1/n} \right) \right],$$

где $z_0^* = x_0 - iy_0$.

В том случае, если число n – обратное целому, этот результат можно получить методом изображений.

При этом вектор сопряженной скорости

$$u - iv = \frac{d\omega}{dz} = \frac{d\omega}{d\zeta} / \frac{dz}{d\zeta}.$$

При $z = \zeta^n$ (n действительно, $n \neq 1$). Преобразование не является конформным в начале координат. Поскольку $|z| = |\zeta|^n$, $\arg z = n \arg \zeta$, то лучи, выходящие из O на плоскости z , соответствуют лучам, выходящим из O на плоскости ζ , а окружности с центром O на плоскости z соответствуют окружностям с центром O на плоскости ζ . Вследствие этого преобразование применимо к областям, границы которых – двугранные углы. Если фигура на плоскости ζ – пара лучей, образующих угол π и отделяющих верхнюю полуплоскость, то лучи

на плоскости z образуют угол π . Это преобразование применимо к двугранным углам величины $\leq 2\pi$.

Функция $d\omega/d\zeta$ аналитична при $z=0$, но $dz/d\zeta$ при этом ведет себя как $\zeta^{n-1} = z^{1-(1/n)}$, что стремится к 0 при $n > 0$ и к ∞ при $n < 1$. Отсюда скорость в вершине угла стремится к 0 или к ∞ в зависимости от того, $n > 0$ или $n < 1$, то есть угол больше или меньше, чем π .

Во втором случае классическая теория дает недостаточное приближение из-за значительной концентрации волоконвоздушной смеси, реальная смесь проходит выступающие углы неплавно. В связи с этим выбор пыльчатой гарнитуры в зависимости от волоконвоздушной смеси в оболочке имеет существенное значение при рассортировке ости и пуха в процессе очистки.

В плоских потоках, у которых все векторные и скалярные величины зависят только от двух координат и времени, плоскость течения совпадает с плоскостью xy .

Тогда получим

$$\omega = \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (2)$$

В случае плоского безвихревого течения условие (2) будет выполняться в любой момент времени. При плоском течении функция φ зависит от x, y, t . Тогда

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3)$$

Еще одна функция координат и времени $\psi(x, y, t)$ определяет скоростное поле течения функции тока с частными производными по координатам от нее при тчении

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y. \quad (4)$$

Необходимым и достаточным условием существования такой функции является

выполнение уравнения неразрывности течения, то есть когда во всех точках потока

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Подставляя в (5) значения скоростей из равенства (4), получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0,$$

то есть уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно.

Уравнение линий тока тогда имеет вид:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}.$$

Откуда

$$-v_y dx + v_x dy = 0. \quad (6)$$

После подстановки в уравнение (6) значений скоростей из уравнения (4) имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0. \quad (7)$$

Следовательно, на линии тока $\varphi = \text{const}$ во всех точках одной и той же линии тока функции тока будут одинаковы (рис.2).

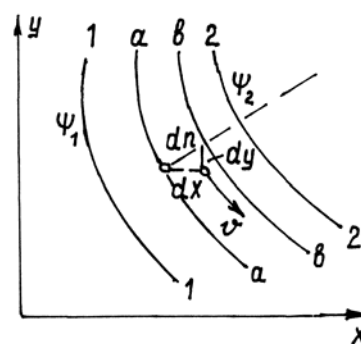


Рис. 2

Расход волоконвоздушной смеси между линиями тока, рассчитанный на единицу ширины потока (в направлении, нормальном к плоскости течения) $dq = v dn$, равен

$$dn = -dx \cos(v, y) / dy \cos(v, x).$$

В этом случае запишем:

$$dq = -v_y dx + v_x dy. \quad (8)$$

После подстановки значения проекций из уравнения (4) в (8) имеем:

$$dq = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy,$$

откуда после интегрирования между линиями тока 1-1 и 2-2 получаем:

$$q_{1-2} = \psi_2 - \psi_1, \quad (9)$$

то есть разность между функциями тока двух разных линий тока равняется расходу волокновоздушной смеси между ними, рассчитанной на единицу ширины потока.

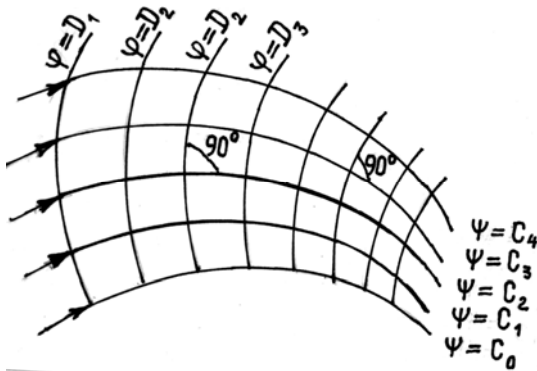


Рис. 3

В плоском потоке линии тока, на которых $\varphi = D_i$, являются эквипотенциальными или линиями равного потенциала скорости. Совокупность линий тока и линий равного потенциала называют сеткой течения плоского потенциального потока (рис.3). Действительно, из уравнений (3) и (4) получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (10)$$

После преобразований (10) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

Вследствие того, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ про-

порциональны направляющим косинусам нормали к линии равного потенциала, а $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ пропорциональны направляющим косинусам нормали к линии тока, то

$$\cos(n, x) / \cos(n, x) + \cos(n, y) / \cos(n, y) = 0,$$

где n_φ и n_ψ – орты нормалей к эквипотенциальной линии. Следовательно,

$$\cos(n_\varphi, n_\psi) = 0,$$

что и доказывает ортогональность сетки течения.

Таким образом, потенциал скорости и функция тока течения волокновоздушной смеси удовлетворяют уравнению Лапласа.

Подставляя значения проекций скорости из выражения (3) в уравнение неразрывности (5), получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (12)$$

а, подставив значения проекций скорости из (4) в (2), будем иметь

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (13)$$

Решение уравнений (12) и (13) для практических задач можно получить при заданных граничных условиях потока.

Поскольку в плоском потенциальном потоке согласно уравнениям (3) и (4) зависимость между функцией потенциала скорости и функцией тока (10) аналогична известным условиям Коши-Римона аналитичности комплексной функции, то можно образовать следующую аналитическую

функцию комплексного переменного $z = x - iy$:

$$W(z) = \varphi + i\Psi, \quad (14)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Производная от функции комплексного потенциала (14) не зависит от направления, по которому она вычисляется и называется комплексной скоростью:

$$\frac{\partial W(z)}{\partial x} = \frac{\partial W(z)}{\partial(iy)} = \frac{dW(z)}{dz} = v_x - iv_y. \quad (15)$$

Модуль комплексной скорости определяет величину самой скорости:

$$\left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v, \quad (16)$$

а вектор комплексной скорости $v_x - iv_y$ является зеркальным отображением вектора $v_z = v_x + iv_y$.

В силу линейности уравнения (14) комплексный потенциал также удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 W(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(z)}{\partial y^2} = 0. \quad (17)$$

Графический метод решения уравнения Лапласа для плоского течения основан на свойствах сетки течения (рис. 3).

После решения уравнения Лапласа и определения функции φ и ψ по формулам (3) и (4) вычисляются проекции скорости течения волоконвоздушного потока. Аэродинамическое давление в волоконвоздушном потоке определяется по уравнениям Эйлера, Бернулли и Лагранжа, согласно которым

$$P_{из} + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const в потоке,}$$

$$P_{из} + \rho \frac{v^2}{2} = -\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t},$$

где $P_{из}$ – избыточное давление.

Для того, чтобы силовое воздействие волоконвоздушного потока на твердое волокнистое тело, необходимо просуммировать давления на его поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ричардсон Э. Динамика реальных жидкостей. – 1965. С.29...31.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов ИГТА. Поступила 28.11.05.