УДК 677.025:539.3

ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАСЧЕТ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ТРИКОТАЖНОГО СЕТЕПОЛОТНА*

В.П. ЩЕРБАКОВ, В.А. ЗАВАРУЕВ, О.С. КОТОВИЧ

(Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина)

Трикотажное сетеполотно, выработанное на основовязальной машине из проволоки, используется в дальнейшем для изготовления элементов конструкций, в частности, антенн наземной и космической связи. Конструктивное решение антенны предусматривает формирование отражающей поверхности из нескольких десятков плоскостных деталей различных конфигураций и размеров.

Для расчета и проектирования антенны необходимо знать упругие константы проволочной сетки. При большом числе ячеек ее можно рассматривать как сплошную непрерывную среду, обладающую свойствами анизотропии (рис.1 – структура сетеполотна ; рис. 2 – схема ортотропного сетеполотна).

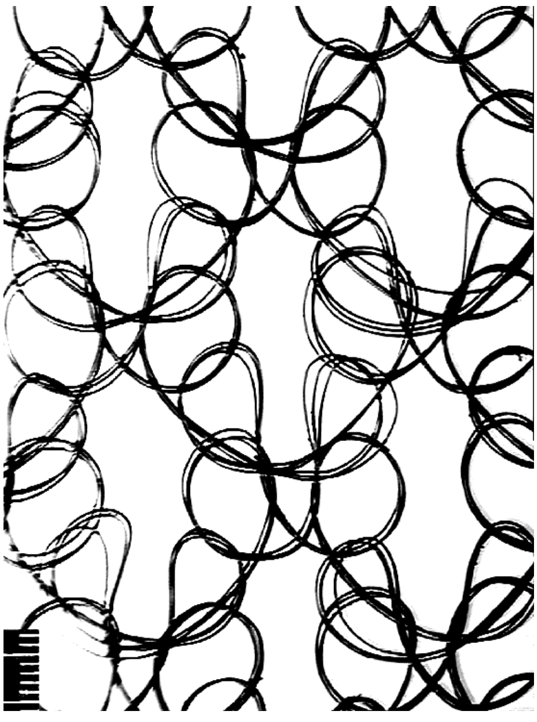

Рис. 1

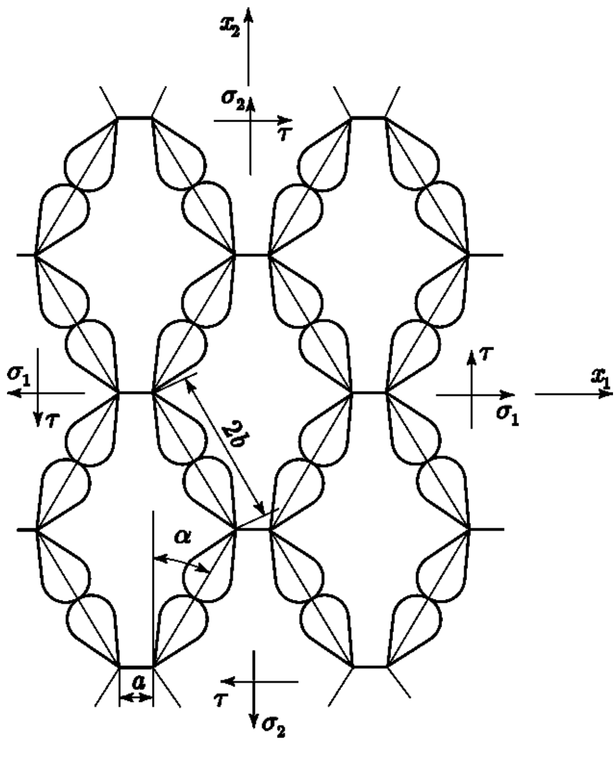

Рис. 2

Если свойства образца, вырезанного из материала, не зависят от его ориентации, то материал называется изотропным. В противном случае материал называют ани-

* Начало.

зотропным. В анизотропной среде под действием одного напряжения σ_{11} могут возникнуть все компоненты деформаций ε_{ij}.

Обобщенный закон Гука для анизотропного материала записывается в виде [1]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell};\ i, j, k, \ell = 1, 2, 3. \qquad (1)$$

Здесь $C_{ijk\ell}$ – константы упругости материала, число которых равно 81.

В развернутом виде уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1112}\varepsilon_{12} + C_{1113}\varepsilon_{13} + C_{1121}\varepsilon_{21} + C_{1122}\varepsilon_{22} + \\ &+ C_{1123}\varepsilon_{23} + C_{1131}\varepsilon_{31} + C_{1132}\varepsilon_{32} + C_{1133}\varepsilon_{33}; \qquad (2)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Можно поступить иначе и выразить из уравнений (1) деформации через напряжения. Разрешая эту систему, имеем уравнение

$$\varepsilon_{ij} = c_{ijk\ell}\sigma_{k\ell}. \qquad (3)$$

Число независимых констант в действительности будет меньше 81. В случае если через каждую точку тела проходят три ортогональные плоскости упругой симметрии, получаем вид анизотропии, называемой ортотропией. Упругие свойства ортотропной среды описываются девятью независимыми постоянными. Проволочная сетка является плоской и для нее, пользуясь обычными обозначениями упругих констант E, v, G, уравнения (3) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}\sigma_1 - \frac{v_{21}}{E_2}\sigma_2,\\ \varepsilon_2 &= \frac{v_{12}}{E_1}\sigma_1 + \frac{1}{E_2}\sigma_2, \qquad 4)\\ \gamma &= \frac{1}{G}\tau.\end{aligned}$$

Здесь E_1, E_2 – модули упругости, соответствующие двум осям симметрии. Коэффициенты Пуассона v снабжены двумя индексами: первый – соответствует той оси, по которой сетка растягивается силой, а второй – той оси, по которой происходит поперечное сужение. Модуль сдвига G_{12}=G соответствует двум осям, лежащим в плоскости сдвига.

Решение подобной и, надо сказать, весьма трудной задачи с предельной ясностью физической стороны проблемы дано в книге В.И. Феодосьева [3].

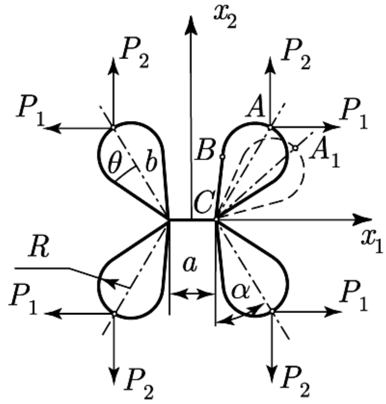

Рис. 3

Будем рассматривать элементарную ячейку, изображенную на рис. 3 – нагружение и перемещения в элементарной ячейке. К ней по осям x_1 и x_2 приложены силы P_1 и P_2. Заметим сразу, что в соответствии с требованиями, которые предъявляются к эксплуатации антенны, сетка должна полностью восстанавливать свои первоначальные размеры и форму после устранения внешних сил. Следовательно, упругие свойства сетеполотна предопределяют линейную зависимость между перемещениями и силами, то есть к рассматриваемой системе применим принцип суперпозиции или принцип независимости действия сил.

Перемещение определяется как сумма результатов независимых действий сил P_1 и P_2. Растяжение вдоль указанных осей не вызывает сдвига. Тогда можно независимо рассмотреть деформации ε_1 и ε_2, обусловленные напряжениями σ_1 и σ_2, и затем отдельно – сдвиг, обусловленный напряжением τ. Здесь же следует указать, что принцип суперпозиции не применим при решении вопросов, связанных с вязанием проволоки. При исследовании больших перемещений при упругом изгибе металлической нити в процессе петлеобразования оказываются несправедливыми основные предположения сопротивления материалов о действии сил при изгибе.

В нашей задаче форма и размеры петли считаются известными из решения задач формирования петли на основе геометрически нелинейной, но физически линейной теории деформирования упругой нити. Получаем сплошное полотно, элементами которого являются плоские кривые и прямолинейные упругие нити (рис. 3).

Схема решения состоит в следующем. Определяются изгибные перемещения криволинейного элемента ячейки ABC, вызванные силами P_1 и P_2; вычисляются относительные удлинения ε_1 и ε_2 этого элемента по осям x_1 и x_2; силы P_1 и P_2 выражаются через условные напряжения σ_1 и σ_2; деформации ε_1, ε_2 приводятся к структуре уравнений (4); устанавливаются выражения для модулей упругости сетеполотна E_1 и E_2. Аналогично находится и модуль сдвига G проволочной сетки.

Исходя из условий образования петли, принимая во внимание структуру сетеполотна, связанного переплетением атлас-атлас, форму петли можно принять в виде, изображенном на рис. 3, 5 [2].

Длина нити в петле ℓ, протяженность петли b вычисляются по формулам:

$$\ell = \pi R + 2R\theta + \frac{2R}{\mathrm{tg}\theta}, \qquad (5)$$

$$b = R + \frac{R}{\sin\theta}. \qquad (6)$$

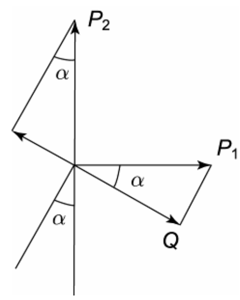

Рис. 4

Силы P_1 и P_2, действующие в точке A петли, приведем к поперечной силе Q, направленной перпендикулярно оси петли, которая ориентирована под углом α относительно оси полотна x_2 (рис. 4 – силы в точке A):

$$Q = P_1 \cos\alpha - P_2 \sin\alpha. \qquad (7)$$

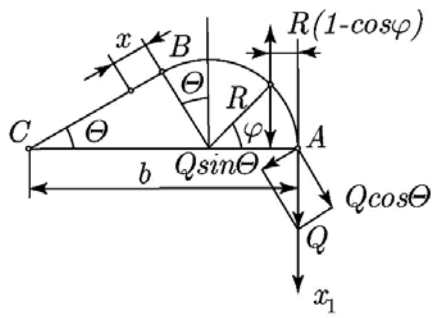

Рис. 5

Получим схему нагружения полупетли, изображенную на рис. 5. Сила Q вызывает изгибное перемещение AA_1 (см. рис. 3), которое будем определять энергетическим методом по формуле Максвелла – Мора.

Геометрическая ось нити на участке AB представляет собой окружность радиуса R. В сопротивлении материалов принято различать брус малой и большой кривизны. Если отношение высоты сечения h (в данном случае диаметра нити α) к радиусу кривизны оси бруса R существенно меньше единицы $\left(\frac{h}{R} = 0{,}2 \text{ и меньше}\right)$, считается, что брус имеет малую кривизну. Здесь изучается сетка из стальной, молибденовой и вольфрамовой проволоки с большой жесткостью диаметра 30 микрометров и меньше. Поэтому можно считать, что петля включает элементы малой кривизны.

Определим перемещение точки A в направлении оси x_1 для полупетли, показанной на рис. 5. Основную роль играют изгибные перемещения. Поэтому из шести интегралов Мора берем один – для изгиба, интегрирование производим по длине каждого участка AB и BC, суммирование – по обоим участкам.

Изгибающие моменты в произвольных сечениях нити имеют значения:

от действия заданной силы Q:

$$M_{Q\,AB} = QR(1-\cos\varphi),$$

$$M_{Q\,BC} = Q\cos\theta(R\cos\theta + x) + QR\sin\theta(1+\sin\theta) =$$
$$= QR(1+\sin\theta) + Qx\cos\theta;$$

от действия единичной силы:

$$M_{1\,AB} = R(1-\cos\varphi),$$
$$M_{1\,BC} = R(1+\sin\theta) + x\cos\theta.$$

Учтем, что длина элемента оси криволинейного участка ds = R$d\varphi$. Находим величину перемещения точки A:

$$\delta_A = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}+\theta} QR(1-\cos\varphi)R(1-\cos\varphi)Rd\varphi +$$
$$+\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{R}{tg\theta}} \left[QR(1+\sin\theta) + Qx\cos\theta\right]\times$$
$$\times\left[R(1+\sin\theta) + x\cos\theta\right]dx.$$

После интегрирования получаем:

$$\delta_A = \frac{QR^3}{EI}\begin{bmatrix} \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\frac{\cos^2\theta}{tg^3\theta} + \\ + \frac{\cos\theta}{tg^2\theta}(1+\sin\theta) + \frac{(1+\sin\theta)^2}{tg\theta} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

На эту же величину δ_A перемещается вторая, правая ветвь петли. Происходит изгиб двух проволок, расположенных симметрично относительно оси петли. Кроме того, петля включает протяжку, соединяющую остовы соседних петель. Конечно, форма протяжки отличается от формы нити в петле, но в то же время надо учесть различие в петлях, образующих сетку.

Рассматривается переплетение атлас-атлас, в котором и форма, и длина нити в петле в некоторой степени отличаются друг от друга. Принимая сетеполотно ортотропным материалом, состоящим из симметричных элементарных ячеек, мы допускаем одинаковость петель. Часть протяжки образует горизонтальную сторону ячейки длиной a. Остальная ее часть принята по форме и длине совпадающей с рассмотренной полупетлей. Поэтому жесткость петли при изгибе примем втрое большей, чем для проволоки.

Обозначим выражение в квадратных скобках через β:

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\frac{\cos^2\theta}{tg^3\theta} + \\ + \frac{\cos\theta}{tg^2\theta}(1+\sin\theta) + \frac{(1+\sin\theta)^2}{tg\theta} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Тогда перемещение δ крайней точки петли определится по формуле

$$\delta = \frac{\beta Q R^3}{3EI}. \qquad (10)$$

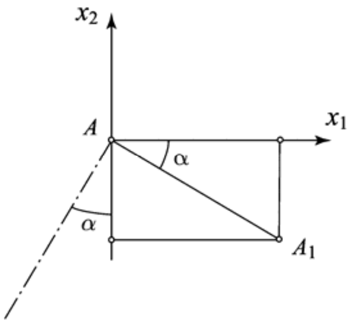

Рис. 6

Ось симметрии петли наклонена к оси x_2 под углом α (см. рис.2). Проекции перемещения $AA_1 = \delta$ на оси x_1 и x_2 равны (рис. 6):

$$\left(AA_1\right)_{x_1} = \delta_1 = \delta\cos\alpha = \frac{\beta Q R^3}{3EI}\cos\alpha,$$

$$\left(AA_1\right)_{x_2} = \delta_2 = -\delta\sin\alpha = -\frac{\beta Q R^3}{3EI}\sin\alpha.$$

Деформации ε_1 и ε_2 определим как отношение написанных проекций перемещения δ_1 и δ_2 к протяженности отрезков ячейки по осям x_1 и x_2, приходящихся на одну силу: по оси x_1 - $\ell_1 = \frac{a}{2} + b\sin\alpha$, по оси x_2 - $\ell_2 = b\cos\alpha$. Получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{\frac{a}{2} + b\sin\alpha} = \frac{2}{3}\frac{\beta Q R^3}{EI}\frac{\cos\alpha}{a + 2b\sin\alpha}, \qquad (11)$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\delta_2}{b\cos\alpha} = -\frac{\beta Q R^3}{3EI}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (12)$$

Выразим силы P_1 и P_2 через условные напряжения σ_1 и σ_2. За толщину сетеполотна с учетом петель и протяжек примем два диаметра нити 2d. Протяженности ℓ_1 и ℓ_2 отрезков ячейки по осям x_1 и x_2 уже написаны. Следовательно,

$$P_1 = 2\sigma_1 b d\cos\alpha, \qquad (13)$$

$$P_2 = \sigma_2 d(a + 2b\sin\alpha). \qquad (14)$$

В выражениях для ε_1 и ε_2 поперечную силу Q заменим в соответствии с (7) силами P_1 и P_2, выразим их через условные напряжения и взамен соотношений (11) и (12) получим:

$$\varepsilon_1 = \sigma_1\beta\frac{4R^3 d}{3EI}\frac{b\cos^3\alpha}{a + 2b\sin\alpha} - \sigma_2\beta\frac{R^3 d}{3EI}\sin 2\alpha, \qquad (15)$$

$$\varepsilon_2 = -\sigma_1\beta\frac{R^3 d}{3EI}\sin 2\alpha + \sigma_2\beta\frac{R^3 d}{3EI}\left(\frac{a}{b} + 2\sin\alpha\right)\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (16)$$

Обратимся к уравнениям (4), сравним их с двумя последними и установим значения упругих постоянных:

$$E_1 = \frac{3EI}{4R^3 d}\frac{\frac{a}{b} + 2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\left[\begin{array}{l}\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\frac{\cos^2\theta}{tg^3\theta} + \\ + \frac{\cos\theta}{tg^2\theta}(1 + \sin\theta) + \frac{(1 + \sin\theta)^2}{tg\theta}\end{array}\right]^{-1}, \qquad (17)$$

$$E_2 = \frac{3EI}{R^3 d}\frac{\cos\alpha}{\left(\frac{a}{b}+2\sin\alpha\right)\sin^2\alpha}\begin{bmatrix} \frac{3}{4}\pi+\frac{3}{2}\theta-2\cos\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\frac{\cos^2\theta}{tg^3\theta}+ \\ +\frac{\cos\theta}{tg^2\theta}(1+\sin\theta)+\frac{(1+\sin\theta)^2}{tg\theta} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (18)$$

$$\nu_{21} = \frac{2\cos^2\alpha}{\left(\frac{a}{b}+2\sin\alpha\right)\sin\alpha}, \quad (19)$$

$$\nu_{12} = \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}\left(\frac{a}{b}+2\sin\alpha\right). \quad (20)$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление жестких полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1967.

2. *Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S.* Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. – New York, 1969.

3. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука. 1996.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 14.11.05.