

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ УТОЧНЫХ НИТЕЙ В ЗОНЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОДНОСЛОЙНОЙ ТКАНИ ПОЛОТНЯНОГО ПЕРЕПЛЕТЕНИЯ*

С.Г. СТЕПАНОВ

(Ивановская государственная текстильная академия)

В [1] получена математическая модель равновесия основной нити в зоне формирования однослойной ткани полотняного переплетения. Там же отмечено, что ее решение невозможно без определения величин распределенных нагрузок, действующих со стороны уточных нитей на нить основы. В свою очередь, каждый отрезок уточных нитей в элементе ткани будет подвергаться действию распределенных нагрузок со стороны основной нити.

На данном этапе рассмотрим равновесие отрезков уточин, как входящих в зону формирования ткани (ЗФТ), так и на стабильном участке сформированной ткани, за исключением прибываемой уточной нити, так как последняя работает в условиях сложного сопротивления и получает пространственную деформацию, что выходит за рамки настоящей статьи и будет рассмотрено отдельно. Принимаем те же допущения по отношению к нити и материалу, из которого они состоят [1].

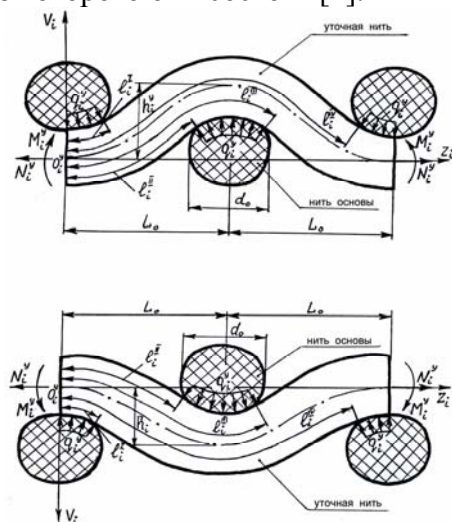


Рис. 1

Рассмотрим равновесие отрезков уточ-

ных нитей в элементе ткани (рис. 1-а, б), которые находятся во взаимном переплетении с отрезком основной нити [1, рис. 1]. Считаем, что со стороны нити основы на нити утка действуют равномерно распределенные нагрузки интенсивностью q_i^y , направленные по нормали к оси нити. Принимаем также, что действующие на уточные нити крутящие моменты, обусловленные силами трения между нитями в зоне их контакта, а также сами силы трения малы по величине и не оказывают существенного влияния на равновесие уточных нитей, поэтому ими можно пренебречь.

Введем для i -й уточной нити систему координат $V_i O_i^y Z_i$, начало которой O_i^y лежит на осевой линии нити. Рис. 1-а характеризует равновесие третьей, пятой и т.д. отрезков уточной нити в элементе ткани [1, рис. 1], то есть нечетных i , а рис. 1-б – то же самое для второй, четвертой и т.д. уточных нитей, то есть четных i , если отсчет уточин вести от опушки ткани.

Наряду с принятыми ранее обозначениями на рисунке показаны: $l_i^I, l_i^{II}, l_i^{III}, l_i^{IV}$ – координаты, определяющие действие распределенной нагрузки на i -ю уточную нить; L_0, d_0 – геометрическая плотность и диаметр основной нити; M_{i0}^y, N_{i0}^y – изгибающий момент и продольная сила в краевых сечениях уточной нити.

Для исследования равновесия уточных нитей, входящих в ЗФТ, введены новые системы координат. Устанавливать связь с

* Научный консультант – проф., докт. техн. наук Г.И. Чистобородов.

ранее принятой системой координат для основной нити [1] нет необходимости, так как связь между математическими моделями для основной нити и уточных нитей, как будет показано ниже, обеспечивается через основное геометрическое соотношение для однослойной ткани – сумма высот волн изгиба нитей основы и утка равна сумме их диаметров с учетом смятия. Причем не важно, в общей или в разных системах координат эти высоты волн нитей определяются.

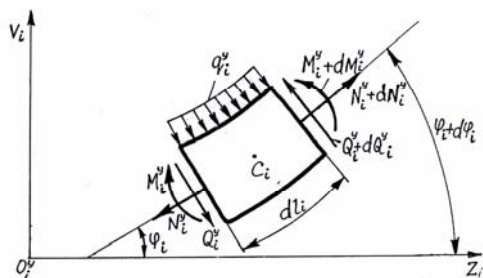


Рис. 2

Выделим на участке ℓ_i^I (рис. 1) элемент нити длиной $d\ell_i$ (рис. 2) с распределенной нагрузкой q_i^y . В каждом из сечений нити действуют три силовых фактора:

$M_i^y, M_i^y + dM_i^y$ – изгибающие моменты;

$N_i^y, N_i^y + dN_i^y$ – продольные силы;

$Q_i^y, Q_i^y + dQ_i^y$ – поперечные силы.

Углы между касательными к оси нити и осью абсцисс обозначим φ_i и $\varphi_i + d\varphi_i$.

Проецируя силы на оси Z_i и V_i , получаем уравнения:

$$Q_i^y \sin \varphi_i - (Q_i^y + dQ_i^y) \sin(\varphi_i + d\varphi_i) - N_i^y \cos \varphi_i + (N_i^y + dN_i^y) \cos(\varphi_i + d\varphi_i) + q_{Z_i} d\ell_i = 0, \quad (1)$$

$$-Q_i^y \cos \varphi_i + (Q_i^y + dQ_i^y) \cos(\varphi_i + d\varphi_i) - N_i^y \sin \varphi_i + (N_i^y + dN_i^y) \sin(\varphi_i + d\varphi_i) - q_{V_i} d\ell_i = 0. \quad (2)$$

Проекция распределенной нагрузки на оси Z_i и V_i (рис. 1) для всего отрезка уточной нити запишем в виде:

$$q_{Z_i} = T_i(\ell_i) \sin \varphi_i, \quad (3)$$

$$q_{V_i} = T_i(\ell_i) \cos \varphi_i, \quad (4)$$

где $T_i(\ell_i) = q_i^y [1 - H(\ell_i - \ell_i^I) - H(\ell_i - \ell_i^{II}) + H(\ell_i - \ell_i^{III}) + H(\ell_i - \ell_i^{IV})]$; $H(\ell_i - \ell_i^I), \dots, H(\ell_i - \ell_i^{IV})$ – функции Хевисайда [2]; ℓ_i – текущая координата.

Пренебрегая малыми величинами второго порядка, приводим уравнения (1) и (2) к виду:

$$-Q_i^y \cos \varphi_i \frac{d\varphi_i}{d\ell_i} - \frac{dQ_i^y}{d\ell_i} \sin \varphi_i - N_i^y \sin \varphi_i \frac{d\varphi_i}{d\ell_i} + \frac{dN_i^y}{d\ell_i} \cos \varphi_i + q_{Z_i} = 0, \quad (5)$$

$$-Q_i^y \sin \varphi_i \frac{d\varphi_i}{d\ell_i} + \frac{dQ_i^y}{d\ell_i} \cos \varphi_i + N_i^y \cos \varphi_i \frac{d\varphi_i}{d\ell_i} + \frac{dN_i^y}{d\ell_i} \sin \varphi_i - q_{V_i} = 0. \quad (6)$$

Умножая (5) на $\cos \varphi$, а (6) – на $\sin \varphi$ и складывая результаты, а затем, умножая (5) на $-\sin \varphi$, а (6) – на $\cos \varphi$ и опять складывая, с учетом (3), (4)Ю получим

$$\frac{dN_i^y}{d\ell_i} - Q_i^y \frac{d\varphi_i}{d\ell_i} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dQ_i^y}{dl_i} + N_i^y \frac{d\varphi_i}{dl_i} - T_i(l_i) = 0. \quad (8)$$

Записывая уравнение равновесия в виде равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки C_i (рис. 2) и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$dM_i^y + Q_i^y dl_i = 0. \quad (9)$$

Момент M_i^y пропорционален приращению угла поворота плоскости сечения нити

$$M_i^y = A_y \frac{d\varphi_i}{dl_i}, \quad (10)$$

где A_y – жесткость на изгиб уточной нити.

С учетом (10) уравнение (9) представим в виде

$$A_y \frac{d^2\varphi_i}{dl_i^2} + Q_i^y = 0. \quad (11)$$

Между координатами осевой линии нити и углом φ_i справедливы следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dl_i} &= \sin \varphi_i, \\ \frac{dZ_i}{dl_i} &= \cos \varphi_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Итак, равновесие i -й уточной нити в ЗФТ описывается следующей нелинейной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dN_i^y}{dl_i} - Q_i^y \frac{d\varphi_i}{dl_i} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{dQ_i^y}{dl_i} + N_i^y \frac{d\varphi_i}{dl_i} - T_i(l_i) = 0, \quad (14)$$

$$A_y \frac{d^2\varphi_i}{dl_i^2} + Q_i^y = 0, \quad (15)$$

$$\frac{dV_i}{dl_i} = \sin \varphi_i, \quad (16)$$

$$\frac{dZ_i}{dl_i} = \cos \varphi_i. \quad (17)$$

Эта же система справедлива и для отрезков уточной нити, не входящих в зону формирования и относящихся к стабильному участку сформированной ткани.

В систему уравнений (13)...(17) входят не найденные пока величины распределенных нагрузок Q_i^y , действующих со стороны основной нити на уточные нити в зоне их контакта. В свою очередь, на основную нить со стороны уточных нитей действуют распределенные нагрузки Q_i^0 [1].

Тогда из условий равенства усилий в зонах контакта имеем следующие интегральные соотношения:

$$\int_{S_{k+1}}^{S_k} Q_i^0 \cos \varphi ds = \int_{l_i^{\text{II}}}^{l_i^{\text{III}}} Q_i^y \cos \varphi_i dl_i, \quad (18)$$

где $i=2, 3, \dots, n+1$; n – число уточин в ЗФТ; S_k, S_{k+1} – координаты точек на основной нити, определяющие действие распределенной нагрузки Q_i^0 ; s, φ – текущая координата и текущее значение угла поворота поперечного сечения основной нити [1].

Запишем основное геометрическое соотношение для однослойной ткани – сумма высот волн изгиба нитей основы и утка равна сумме их диаметров – и учтем при этом вертикальное смятие нитей:

$$h_i^0 + h_i^y = d_o \eta_{\text{ов}} + d_y \eta_{\text{ув}}, \quad (19)$$

где h_i^0 – высота волны изгиба отрезка основной нити между сечениями, проходящими через центры $i-1$ и $i+1$ уточины в

ЗФТ; h_i^y – высота волны изгиба отрезка i -й уточины (рис. 1).

Величины h_i^0 и h_i^y изменяются в пределах ЗФТ.

ВЫВОДЫ

1. Получены математическая модель равновесия уточных нитей в зоне формирования однослойной ткани полотняного переплетения, а также интегральные и геометрические соотношения, связывающие ее с математической моделью равновесия основной нити [1].

2. Для исследования сложного процесса

взаимодействия нитей в ЗФТ полученных математических моделей недостаточно и в дополнение к ним необходимо получить математическую модель равновесия прибываемой уточной нити, учитывая для нее соотношения, аналогичные (18), (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов С.Г.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, № 1. С.47...51.
2. *Светлицкий В.А.* Механика гибких стержней и нитей. – М.: Машиностроение, 1978.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 01.02.06.