УДК 677.025:539.3

ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАСЧЕТ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ТРИКОТАЖНОГО СЕТЕПОЛОТНА*

В. П. ЩЕРБАКОВ, В. А. ЗАВАРУЕВ, О. С. КОТОВИЧ

(Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина)

В качестве примера применения изложенной теории двухосного растяжения рассмотрим нагружение проволочной сетки размером 12×12 см^2 "мертвым" грузом 46 сН как в направлении петельных столбиков, так и петельных рядов.

Экспериментальные значения деформации вдоль столбиков (по вертикали) составили $\varepsilon_в$ = 0,027, вдоль рядов (по горизонтали) - $\varepsilon_г$ = 16,1. Сетеполотно образовано на основовязальной машине переплетением атлас - атлас из нитей, каждая из которых состоит из трех вольфрамовых проволок.

Увеличенная фотография образца дана на рис. 1 из [1]. Угол θ определен из формулы (6) из [1]: $\sin\theta = \dfrac{1}{\dfrac{b}{R}-1} = 0{,}506$; θ = =0,53 рад. Теперь по формуле (9) из [1] можно вычислить β: β = 10,094.

Найден из опыта модуль упругости одиночной проволоки; определены момент инерции поперечного сечения и жесткость одной проволоки при изгибе. Жесткость трех проволок равна сумме жесткостей каждой из них.

Эти формулы дают значения модулей упругости:

$$E_1 = 7{,}662\frac{сН}{мм^2};\ E_2 = 42{,}832\frac{сН}{мм^2}.$$

В этих же условиях рассчитанные по формулам (19) и (20) из [1] коэффициенты Пуассона равны ν_{21}= 2,364, ν_{12} = 0,423.

Здесь следует дать пояснение, относящееся к полученным величинам коэффициентов ν_{21}, ν_{12} и решению в целом. Дело в том, что произведение $\nu_{21}\,\nu_{12}$ равно единице. Если же решить первые два уравнения системы (4) из [1] относительно напряжений, то получим

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1-\nu_{21}\nu_{12}}(\varepsilon_1 + \nu_{21}\varepsilon_2),$$
$$\sigma_2 = \frac{E_2}{1-\nu_{21}\nu_{12}}(\varepsilon_2 + \nu_{12}\varepsilon_1). \qquad (1)$$

При произвольных значениях деформаций ε_1, ε_2 напряжения σ_1, σ_2, если $\nu_{21}\nu_{12}$=1, обращаются в бесконечность. Объяснение этому надо искать в принятой модели сетеполотна.

Рассматривая деформацию изгиба петли в ячейке [2…4], мы приняли проволоку нерастяжимой. В этом случае перемещение точки А обусловливается только изгибом. В действительности же возникает и дополнительное перемещение, вызванное растяжением проволоки, и это перемещение здесь не учтено. Разрывная деформация вольфрамовой нити составляет ε=0,016.

В условиях нагружения реальной конструкции антенны деформация нити намного меньше. Поэтому не следует ожидать большого влияния растяжения проволоки на общее перемещение петли при растяжении. Кроме того, и это можно было бы учесть, но расчетная схема не вполне

* Окончание. Начало см. в №1, 2006 г.

адекватна реальной сетке, и бессмысленно уточнять решение при той модели, которая принята в качестве исходной.

Проверим соответствие изложенной теории экспериментальным данным, полученным при двухосном растяжении рассчитанного сетеполотна. Величины груза и соответствующие деформации приведены в начале данной статьи.

Вычислим деформации вдоль петельных столбиков ε_2 и по линии петельных рядов ε_1 по уравнениям (4) из [1]. Перейдем от сил к напряжениям:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{2bd\cos\alpha},$$
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{d(a+2b\sin\alpha)}. \quad (2)$$

Учтем, что P_1 и P_2 являются силами, приходящимися на одну петлю по направлениям 1 и 2. Определив величину раппорта по горизонтали и вертикали, получим число петель, расположенных по направлению 2 (по вертикали) и по направлению 1(по горизонтали).

Тогда единичные силы P_1 и P_2 принимают значения P_1 =0,291 сН; P_2 =0,344 сН. Вычисления по формулам (2) дают $\sigma_1 = 2{,}497\frac{\text{сН}}{\text{мм}^2}$; $\sigma_2 = 4{,}501\frac{\text{сН}}{\text{мм}^2}$.

Обращаясь к первым двум выражениям системы (4) из [1], находим искомые деформации: ε_1=0,136; ε_2=-0,058. Учитывая знак "минус" в формуле (12) из [1], деформацию в направлении 2 следует считать положительной. Экспериментальные данные, равные $\varepsilon_{1э}$=0,161; $\varepsilon_{2э}$=0,027, не противоречат расчетным, а учитывая наличие многих рабочих допущений, принятых при построении модели сетки, их можно считать практически совпадающими.

Пятой упругой постоянной нашего ортотропного материала является модуль сдвига G. Образец подвергается сдвигу γ под действием касательных напряжений τ. Деформирование элемента показано на рис. 1.

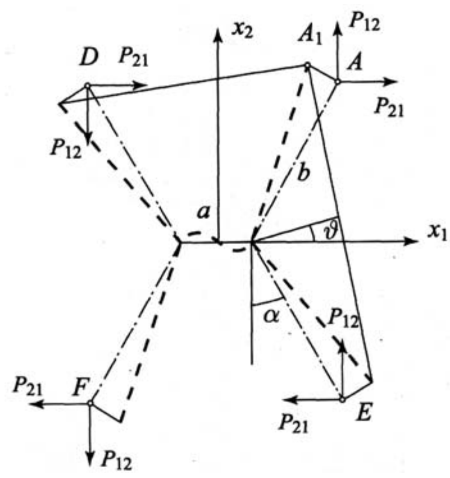

Рис. 1

На элементарную ячейку действуют силы P_{12} и P_{21}, которые определяются через касательные напряжения соотношениями

$$P_{12} = 2\tau bd\cos\alpha,$$
$$P_{21} = \tau d(a + 2b\sin\alpha). \quad (3)$$

Эти соотношения получены по аналогии с формулами (13) и (14) из [1] при тех же условиях: за толщину сетеполотна с учетом петель и протяжек принято два диаметра нити 2d, протяженности ℓ_1 и ℓ_2 отрезков ячейки по осям x_1 и x_2 те же самые (ℓ_1=a/2+bsinα, ℓ_2=bcosα). Схема расчета остается той же, что и для модулей упругости и коэффициентов Пуассона.

Определим перемещение точки А в направлении оси x_2 для полупетли, показанной на рис. 1. Это перемещение складывается из изгибного перемещения, определяемого формулой (10) из [1]: $\delta = \frac{\beta QR^3}{3EI}$, и дополнительного перемещения, вызванного перекосом ячейки из-за деформирования горизонтального участка длиной а.

Дополнительное перемещение δ_θ определяется углом поворота θ на конце горизонтального участка и равно $\delta_\theta = \theta$ b.

Найдем угол θ, рассматривая горизонтальный участок ячейки как двухопорную балочку длиной a, изгибаемую на обоих шарнирно опертых концах балки моментами. Для симметричной балки рассматриваем одну ее половину.

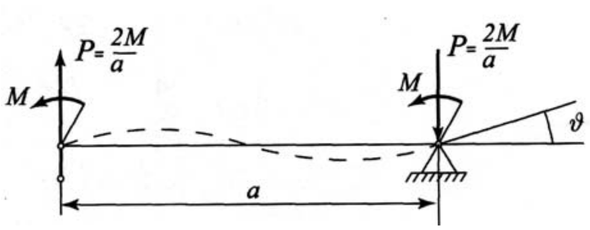

Рис. 2

Определяем реакции, возникающие в шарнире (рис. 2 – к расчету угла поворота), и составляем уравнение изгибающих моментов для участка балочки.

Дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид

$$y''=\frac{M}{EI}\left(\frac{2z}{\ell}-1\right). \qquad (4)$$

Интегрируя (4), получаем уравнение углов наклона касательных к упругой линии:

$$y'=\frac{M}{EI}\left(\frac{2z^2}{2\ell}-z\right)+C. \qquad (5)$$

Эти углы равны углам поворота соответствующих поперечных сечений. Интегрируя дважды выражение (4), получаем уравнение упругой линии:

$$y=\frac{M}{EI}\left(\frac{z^3}{3\ell}-\frac{z^2}{2}\right)+Cz+D. \qquad (6)$$

Учитывая, что левый конец балочки шарнирно оперт, имеем D=0. Прогиб сечения в середине балочки при z = a/2 равен нулю. Из этого условия получаем $C=\frac{Ma}{6EI}$.

Из (5) видно, что постоянная C представляет собой угол поворота сечения в начале координат, то есть $\theta=\frac{Ma}{24EI}$.

Число 24 явилось следствием того, что на горизонтальном участке расположены четыре проволоки (рис. 1 из [1]), а их жесткость вчетверо больше жесткости одной проволоки. Момент M=Q2b.

Теперь можно найти дополнительное перемещение: $\delta_\theta=\frac{Mab}{24EI}=\frac{Qab^2}{12EI}$.

Полное перемещение:

$$AA_1=\delta+\delta_\theta=\frac{\beta QR^3}{3EI}+\frac{Qab^2}{12EI}=$$

$$=Q\frac{4\beta R^3+ab^2}{12EI}. \qquad (7)$$

Угол сдвига для деформированной ячейки определяется как разность углов поворота отрезков AE и AD (рис. 1):

$$\gamma=\gamma_2-\gamma_1=\frac{AB_2}{\frac{a}{2}+b\sin\alpha}-\frac{AB_1}{b\cos\alpha}.$$

Из рис. 1 видно, что

$$\left(AA_1\right)_{x_2}=AA_1\sin\alpha,$$

$$\left(AA_1\right)_{x_1}=AA_1\cos\alpha.$$

Тогда угол сдвига принимает значение

$$\gamma=-\frac{a}{(a+2b\sin\alpha)b}AA_1.$$

С учетом (7) будем иметь:

$$\gamma=\frac{Q}{12EI}\frac{a(4\beta R^3+ab^2)}{b(a+2b\sin\alpha)}. \qquad (8)$$

Силы P_{12} и P_{21}, действующие в точке A петли, как и ранее, приведем к поперечной силе Q, направленной перпендикулярно оси петли, которая ориентирована под углом α относительно оси полотна x_2:

$$Q = P_{12}\sin\alpha - P_{21}\cos\alpha. \qquad (9)$$

Силы P_{12} и P_{21} заменим касательными напряжениями в соответствии с выражениями (3). Таким образом, угол сдвига будет

$$\gamma = \tau \frac{1}{12EI} \frac{a^2 d(4\beta R^3 + ab^2)\cos\alpha}{b(a + 2b\sin\alpha)}. \quad (10)$$

Сопоставляя это выражение с третьим уравнением системы (4) из [1] $\gamma = \frac{1}{G}\tau$, описывающей ортотропную среду, напишем приведенный модуль сдвига в форме

$$G = 12EI \frac{b(a + 2b\sin\alpha)}{a^2 d(4\beta R^3 + ab^2)\cos\alpha}. \quad (11)$$

Численные значения величин, входящих в формулу (11), приведены в расчетах модулей упругости E_1 и E_2.

Расчет модуля сдвига дает его значение:

$$G = 116{,}97 \frac{сН}{мм^2}.$$

Таким образом, рассчитаны упругие постоянные создаваемого проволочного сетеполотна. Конечно, определить модули упругости и коэффициенты Пуассона на готовой сетке технически гораздо проще. Но если обратиться к структуре формул, то видно, что они включают основные характеристики проволоки (жесткость EI) и параметры, определяющие структуру полотна (размеры петель, их ориентацию и взаимное расположение). Вследствие этого изложенная теория позволяет объяснить механизм явлений при деформировании и нагружении полотна и управлять процессом вязания для получения сетки с заданными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков В.П., Заваруев В.А., Котович О.С.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, №1. С.74…79.

2. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление жестких полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1967.

3. *Hearle J. W. S., Grosberg P., Backer S.* Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. – New York, 1969.

4. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука. 1996.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 14.11.05.