УДК 004.942:544.272:331.45

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОКЛИМАТА В ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПОМЕЩЕНИЯХ С ПОВЫШЕННОЙ ВЛАЖНОСТЬЮ

*В.В. ПЕКУНОВ, Ф.Н. ЯСИНСКИЙ*

**(Ивановский государственный энергетический университет)**

Микроклимат в производственных помещениях часто характеризуется наличием таких неблагоприятных факторов, как повышенная влажность, запыленность, наличие реагирующих газообразных загрязнителей. Такая ситуация типична для предприятий текстильной промышленности.

Актуальна задача достаточно точного и оперативного анализа микроклимата, которая эффективно решается с помощью численного моделирования.

В данной работе приводится фрагмент разработанной нами многофазной многокомпонентной модели, учитывающий факторы, связанные с влажностью: динамику водяного пара и капель; конденсацию и испарение; поглощение (и высвобождение) газообразных загрязнителей каплями.

Пусть рассматривается трехмерная расчетная область с прямоугольными координатами ($x_1$, $x_2$, $x_3$), в которой уже записаны уравнения несущей фазы для скорости воздуха $U = \left(\overline{U_1, U_2, U_3}\right)$, турбулентной вязкости $\nu_{турб}$ и температуры T.

Перенос N газообразных веществ с концентрациями C описывается уравнениями:

$$\frac{\partial C_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} U_i^j \frac{\partial C_j}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(D_{C_j} + \alpha_{C_j}\nu_{турб}\right)\frac{\partial C_j}{\partial x_i}\right) - \Delta C_j + Q(t);\ j = \overline{1, N},$$

где $U_1^j = U_1$, $U_2^j = U_2$, $U_3^j = U_3 + W_j$; $W_j$ – скорость витания j-го вещества; $D_{C_j}$ – коэффициент диффузии j-го вещества; $\alpha_{C_j}$ – вспомогательный коэффициент.

Член $\Delta C_j$ выражает изменение концентрации j-го вещества при взаимодействии с каплями воды; Q(t) учитывает изменение концентрации за счет химических реакций.

$$\Delta C_j = \sum_{i=1}^{Z} \widetilde{\Phi}_{j,i}^{0} + \sum_{i=1}^{Z-1} \widetilde{\Phi}_{j,i+1}^{-} + \sum_{i=2}^{Z} \widetilde{\Phi}_{j,i-1}^{+},$$

где величины $\widetilde{\Phi}$ выражают взаимодействие газов с каплями; Z – число компонентов капельной фазы.

Для водяного пара применим особую формулу:

$$\Delta C_{пар} = \frac{1}{M_k}\left(\sum_{i=1}^{Z} \Phi_i^0 + \sum_{i=1}^{Z-1} \Phi_{i+1}^{-} + \sum_{i=2}^{Z} \Phi_{i-1}^{+}\right),$$

где $M_k$ – молярная масса воды; Φ учитывает взаимодействие пара с каплями.

Капельная фаза является многокомпонентной, для любого i-го компонента ($i = \overline{1, Z}$) определены плотность $\rho_k^i$, концентрация $N_k^i$ (в ед/м$^3$) и скорость $U_k^i$. Каждому полностью заполненному i-му компоненту соответствуют капли с диаметрами от $d_i$ до $d_{i+1}$. В общем случае это капли с диаметрами от $x_i$ до $y_i$, причем $x_i$, $y_i \in [d_i; d_{i+1}]$. Самый первый компонент считаем капельно-пылевым, то есть диаметр $d_1$ – фактически диаметр пылевого ядра капли.

Распределение $n_i(d)$ капель по диаметрам постоянно меняется в результате переноса (между ячейками сетки), конденсации и испарения.

Предлагается подход, когда параметры распределения не хранятся, а вычисляются (посредством интерполяции) на каждой итерации из "физических" параметров плотности и концентрации. Это позволит определить линейное распределение при полном заполнении интервала и равномерное распределение при частичном заполнении, когда дополнительно вычисляется положение начала или конца незаполненного участка.

Рассмотрим процедуру поиска функции распределения и характеристик заполненности. Определим тип процесса: конденсация (К), испарение (И) или стабилизация (С). Интервал считается стабильным по одной из причин: а) сочетаются конденсация и испарение; б) интервал пуст; в) интервал является капельно-пылевым (условно неиспаряемым) и есть тенденция к испарению.

Функция mode(i), определяющая тип процесса для i-го интервала:

$$\mathrm{mode}(i)=\begin{cases}\text{К}, & \text{если } \{\delta_i(d_i)>0\}\wedge\{\delta_i(d_{i+1})>0\};\\ \text{И}, & \text{если } \{\delta_i(d_i)<0\}\wedge\{\delta_i(d_{i+1})<0\}\wedge\{i>1\};\\ \text{С}, & \text{если } \{\delta_i(d_i)\cdot\delta_i(d_{i+1})\le 0\}\vee\{\text{интервал пуст}\}\vee\\ & \vee\left[\{\delta_i(d_i)<0\}\wedge\{\delta_i(d_{i+1})<0\}\wedge\{i=1\}\right];\end{cases}$$

$$\delta_i(d)=C_{\text{пар}}-C^i_{\text{пов}}(d),$$

где $C^i_{\text{пов}}(d)$ – концентрация пара на поверхности капли диаметром d:

$$C^i_{\text{пов}}(d)=\frac{P_{\text{насыщ}}\left(T,\frac{1}{N^i_k}\sum_j\gamma^i_j,d\right)}{RT},$$

$$P_{\text{насыщ}}(T,n,d)=P^0_{\text{насыщ}}(T-273{,}15)\exp\left(\frac{4M_k\sigma}{\bar\rho_k RTd}-\frac{6nM_k}{\pi\bar\rho_k d^3}\right),$$

где n – количество молей растворенного вещества; σ – поверхностное натяжение воды; $P^0_{\text{насыщ}}(t)$ – давление насыщенного пара над плоской поверхностью; $\bar\rho^i_k$ – плотность вещества капель в i-м компоненте.

Пустым считаем интервал, для которого выполняется условие

$$\{N^i_k\le\varepsilon\}\vee\left\{\frac{\rho^i_k}{N^i_k}<\frac{\pi}{6}\bar\rho^i_k d_i^3\right\}\vee\left\{\frac{\rho^i_k}{N^i_k}>\frac{\pi}{6}\bar\rho^i_k d_{i+1}^3\right\},$$

где ε – малая величина.

Вторая и третья части условия отсекают случай физически некорректного сочетания значений плотности и концентрации, которое может возникнуть при конвективном переносе капель в пустую ячейку.

Частично заполненным является интервал, в котором истинно условие

$$\{(i=1)\wedge(\mathrm{mode}(i)=K)\}\vee\{(i=Z)\wedge(\mathrm{mode}(i)=И)\}\vee$$
$$\vee\{(i<Z)\wedge\{\mathrm{mode}(i)\neq\mathrm{mode}(i+1)\}\wedge(\mathrm{mode}(i)=И)\}\vee$$
$$\vee\{(i>1)\wedge\{\mathrm{mode}(i)\neq\mathrm{mode}(i-1)\}\wedge(\mathrm{mode}(i)=K)\}\vee$$
$$\vee\{\mathrm{forw}(i)\}\vee\{\mathrm{back}(i)\}.$$

Все прочие непустые интервалы считаем полностью заполненными. Логические функции forw(i) и back(i) выделяют особые случаи промежуточных интервалов:

$$\mathrm{forw}(i)=\{i>1\}\wedge\{i<Z\}\wedge\{(\mathrm{mode}(i-1)=K)\wedge(\mathrm{mode}(i)=K)\wedge[\text{интервал } (i+1) \text{ пуст}]\};$$
$$\mathrm{back}(i)=\{i>1\}\wedge\{i<Z\}\wedge\{[\text{интервал } (i-1) \text{ пуст}]\wedge(\mathrm{mode}(i)=И)\wedge(\mathrm{mode}(i+1)=И)\}.$$

Пусть функция распределения:

$$n_i(d) = a_i d + b_i.$$

1. Для пустого интервала $n_i(d) = 0$.

2. Для частично заполненного интервала считаем распределение равномерным, то есть $a_i = 0$ и задача сводится к поиску $b_i$, а также начала $x_i$ и конца $y_i$ заполненного участка. Найдем $x_i'$ и $y_i'$ как единственные корни уравнений

$$\left(d_{i+1}^2 + x_i'^2\right)\left(d_{i+1} + x_i'\right) = \frac{24\rho_k^i}{\pi\bar{\rho}_k^i N_k^i};$$
$$\left(d_i^2 + y_i'^2\right)\left(d_i + y_i'\right) = \frac{24\rho_k^i}{\pi\bar{\rho}_k^i N_k^i}.$$

Тогда

$$x_i = \begin{cases} d_i, & \text{если } \{(\mathrm{mode}(i)\neq K)\vee \mathrm{forw}(i)\}\wedge\{\neg\mathrm{back}(i)\}, \\ \max(x_i', d_i) & \text{иначе;}\end{cases}$$
$$y_i = \begin{cases} d_{i+1}, & \text{если } \{(\mathrm{mode}(i)\neq И)\vee \mathrm{back}(i)\}\wedge\{\neg\mathrm{forw}(i)\}, \\ \min(y_i', d_i) & \text{иначе;}\end{cases}$$
$$b_i = \frac{N_k^i}{y_i - x_i}.$$

3. Для полностью заполненного интервала считаем, что

$$x_i = d_i; \quad y_i = d_{i+1}.$$

При этом $a_i$, $b_i$ являются решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_i \dfrac{\left(y_i^2 - x_i^2\right)}{2} + b_i\left(y_i - x_i\right) = N_k^i; \\ a_i \dfrac{\left(y_i^5 - x_i^5\right)}{5} + b_i \dfrac{\left(y_i^4 - x_i^4\right)}{4} = \dfrac{6\rho_k^i}{\pi\bar{\rho}_k^i}. \end{cases}$$

Если нарушается условие физической корректности распределения $n_i(d)$:

$$(n_i(x_i) \geq 0) \wedge (n_i(y_i) \geq 0),$$

то следует воспользоваться равномерным распределением, определив

$$a_i = 0; \quad b_i = \frac{N_k^i}{y_i - x_i}.$$

Рассмотрим основные уравнения для капельной фазы. Скорость капель:

$$U_{k1}^i = U_1; \; U_{k2}^i = U_2;$$
$$U_{k3}^i = U_3 + W_k^i;$$

где $W_k^i$ –средняя скорость витания капель i-го компонента. При этом для компонентов с каплями малых диаметров можно считать $W_k^i = \mathrm{const}$. В прочих случаях

$$W_k^i = -\Delta U = -\left(U_3 - U_{k3}^i\right),$$

причем $\Delta U$ находится путем решения нелинейного уравнения, полученного из условия равенства силы аэродинамического сопротивления силе тяжести.

Уравнение для плотности i-го компонента $\rho_k^i$:

$$\frac{\partial \rho_k^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} U_{kj}^i \frac{\partial \rho_k^i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(D_{\rho k}^i + \alpha_{\rho k}\nu_{турб}\right)\frac{\partial \rho_k^i}{\partial x_j}\right) - \rho_k^i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial U_{kj}^i}{\partial x_j} + \Delta\rho_k^i ,$$

где $D_{\rho k}^i$ – коэффициент диффузии; $\alpha_{\rho k}$ – вспомогательный коэффициент. Конденсация и испарение, межкомпонентные переходы определяются формулой

$$\Delta\rho_k^i = \Phi_i^0 + \Phi_{i+1}^- + \Phi_{i-1}^+ + \frac{1}{\tau}\left[-\Delta^+\rho_k^i - \Delta^-\rho_k^i + \Delta^+\rho_k^{i-1} + \Delta^-\rho_k^{i+1}\right],$$

где $\tau$ –продолжительность процесса перехода.

Уравнение для концентрации i-го компонента $N_k^i$:

$$\frac{\partial N_k^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} U_{kj}^i \frac{\partial N_k^i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(D_{Nk}^i + \alpha_{Nk}\nu_{турб}\right)\frac{\partial N_k^i}{\partial x_j}\right) - N_k^i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial U_{kj}^i}{\partial x_j} + \Delta N_k^i ;$$

$$\Delta N_k^i = \frac{1}{\tau}\left[-\Delta^+N_k^i - \Delta^-N_k^i + \Delta^+N_k^{i-1} + \Delta^-N_k^{i+1}\right],$$

где $D_{Nk}^i$ –коэффициент диффузии; $\alpha_{Nk}$ – вспомогательный коэффициент.

Учитывается растворение газов в каплях (см., например, [2]). Введены уравнения для концентрации j-го газа в каплях i-го компонента $\gamma_j^i$:

$$\frac{\partial \gamma_j^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} U_{kj}^i \frac{\partial \gamma_j^i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(D_{\gamma j}^i + \alpha_{\gamma}\nu_{турб}\right)\frac{\partial \gamma_j^i}{\partial x_j}\right) + \Delta\gamma_j^i; \quad j = \overline{1,N} ;$$

$$\Delta\gamma_j^i = \tilde{\Phi}_{j,i}^0 + \tilde{\Phi}_{j,i+1}^- + \tilde{\Phi}_{j,i-1}^+ + \frac{1}{\tau}\left[-\Delta^+\rho_k^i \frac{\gamma_j^i}{\bar{\rho}_k^i} - \Delta^-\rho_k^i \frac{\gamma_j^i}{\bar{\rho}_k^i} + \Delta^+\rho_k^{i-1} \frac{\gamma_j^{i-1}}{\bar{\rho}_k^{i-1}} + \Delta^-\rho_k^{i+1} \frac{\gamma_j^{i+1}}{\bar{\rho}_k^{i+1}}\right],$$

где $D_{\gamma j}^i$ – коэффициент диффузии; $\alpha_\gamma$ – вспомогательный коэффициент.

Межкомпонентные переходы массы и концентрации, обусловленные изменением диаметра капель (при конденсации и испарении), даются величинами:

$$\Delta^-\rho_k^i = \frac{\pi}{6}\bar{\rho}_k^i\left[\frac{a_i}{5}\left(\left(d_i^{**}\right)^5 - x_i^5\right) + \frac{b_i}{4}\left(\left(d_i^{**}\right)^4 - x_i^4\right)\right]; \ \Delta^-N_k^i = \frac{a_i}{2}\left(\left(d_i^{**}\right)^2 - x_i^2\right) + b_i\left(d_i^{**} - x_i\right);$$

$$\Delta^+\rho_k^i = \frac{\pi}{6}\bar{\rho}_k^i\left[\frac{a_i}{5}\left(y_i^5 - \left(d_i^*\right)^5\right) + \frac{b_i}{4}\left(y_i^4 - \left(d_i^*\right)^4\right)\right]; \ \Delta^+N_k^i = \frac{a_i}{2}\left(y_i^2 - \left(d_i^*\right)^2\right) + b_i\left(y_i - d_i^*\right).$$

При конденсации капли с $d_i^* \le d \le y_i$ переходят из i-го компонента в (i + 1)-й компонент. При испарении капли с $x_i \le d \le d_i^{**}$ переходят из i-го в (i – 1)-й компонент. Из неявной разностной схемы для уравнения роста капли имеем:

$$d_i^* = \begin{cases} y_i \ \text{ при } i = Z+1 \text{ или при испарении } \left(C_{пар} < C_{пов}^i(y_i)\right); \\ y_i - \tau \dfrac{2L_i(y_i)}{\bar{\rho}_k^i y_i} \ \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$d_i^{**} = \begin{cases} x_i - \tau \dfrac{2L_i(x_i)}{\bar{\rho}_k^i x_i} \ \text{ если идет испарение } \left(C_{пар} < C_{пов}^i(x_i)\right); \\ x_i \ \text{ иначе.} \end{cases}$$

Массообмен капель с окружающей средой описывается величинами:

$$\Phi_i^0 = \pi \int_{d_i^{**}}^{d_i^*} n_i(D) D L_i(D) dD\,;\ \Phi_i^- = \pi \int_{x_i}^{d_i^{**}} n_i(D) D L_i(D) dD\,;\ \Phi_i^+ = \pi \int_{d_i^*}^{y_i} n_i(D) D L_i(D) dD\,.$$

Поток пара при конденсации и испарении [1] определяется величиной

$$L_i(d) = \frac{C_{пар} - C_{пов}^i(d)}{\dfrac{1}{Nu_{AB}\langle D_{пар}\langle d\rangle\rangle D_{пар}\langle d\rangle M_k} + \dfrac{P_{насыщ}^0(T - 273{,}15)}{RT} \dfrac{h_{исп}}{Nu_T \lambda\langle d\rangle}\left(\dfrac{h_{исп} M_k}{RT} - 1\right)},$$

где $Nu_{AB}\langle D\rangle$ – местное диффузионное число Нуссельта; $D_{пар}\langle d\rangle$ – коэффициент диффузии пара вблизи поверхности капли диаметром d; $Nu_T$ – местное число Нуссельта, характеризующее теплоотдачу; $h_{исп}$ – удельная теплота испарения вещества капли; $\lambda\langle d\rangle$ – коэффициент теплопроводности воздуха вблизи поверхности капли.

Поток j-го газообразного вещества между капельной и несущей фазами:

$$\tilde{\Phi}_{j,i}^0 = \pi \tilde{L}_j^i \int_{d_i^{**}}^{d_i^*} n_i(D) D dD\,;$$

$$\tilde{\Phi}_{j,i}^- = \pi \tilde{L}_j^i \int_{x_i}^{d_i^{**}} n_i(D) D dD\,;$$

$$\tilde{\Phi}_{j,i}^+ = \pi \tilde{L}_j^i \int_{d_i^*}^{y_i} n_i(D) D dD\,;$$

$$\tilde{L}_j^i = Nu_{AB}\langle D_{C_j}\rangle D_{C_j}\left(C_j - \frac{\tilde{\gamma}_j^i}{H_j(T_k^i) RT}\right);$$

$$\tilde{\gamma}_j^i = \frac{6\gamma_j^i}{\pi \int_{x_i}^{y_i} n_i(D) D^3 dD},$$

где растворимость j-го газа выражается коэффициентом Генри:

$$H_j(T) = H_j^{298} e^{\frac{-\Delta H_j}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{298}\right)},$$

причем $H_j^{298} = H_j(298)$; $\Delta H_j$ –удельная теплота растворения.

Были проведены численные эксперименты по моделированию динамики популяции мелких капель в различных условиях. Сравнение с результатами, полученными путем прямого моделирования M капель, показало, что при существенно меньшей вычислительной нагрузке (теоретически не менее чем в $M/(2Z)$ раз) погрешность предложенной модели варьировалась в диапазоне 2÷10%.

## ВЫВОДЫ

Предложена математическая модель влажного микроклимата в производственных помещениях, учитывающая большое число значимых факторов. Модель может быть использована при разработке и модернизации систем вентиляции предприятий текстильной промышленности.

## ЛИТЕРАТУРА

*Seinfeld J.H., Pandis S.N.* Atmospheric Chemistry and Physics. – Wiley, New York, 1998.

*Xue H., Feingold G.* (2004). A modeling study of the effect of nitric acid on cloud properties // J. Geophys. Res., 109, D18204.

Рекомендована кафедрой прикладной математики и информационных технологий. Поступила 22.12.05.