

УДК 677.024

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ  
ПРИБИВАЕМОЙ УТОЧНОЙ НИТИ\***

С.Г. СТЕПАНОВ

(Ивановская государственная текстильная академия)

Рассмотрим зону формирования однослойной ткани полотняного переплетения в момент крайнего переднего положения берда (рис. 1-а,б).

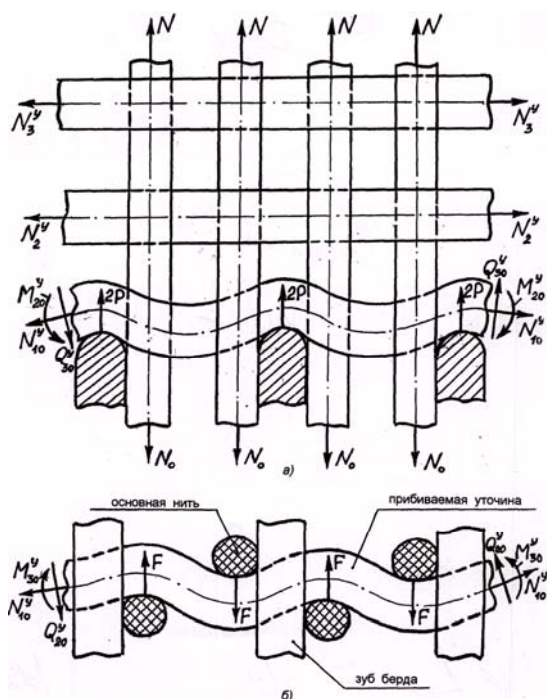


Рис. 1

Выделим элемент прибиваемой уточной нити между двумя соседними зубьями берда и рассмотрим его равновесие (рис. 2-а, б, в). На рассматриваемый элемент уточины в случае равнатянутого зева от каждого зуба берда передается усилие  $P$  прибора. Со стороны основной нити на прибиваемую уточину будут действовать те же силы, что и со стороны прибиваемой уточины на основу [1], но противоположно направленные (рис.3).

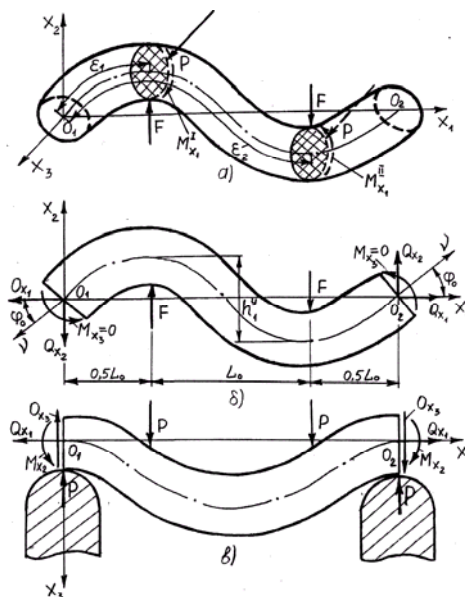


Рис. 2

Элемент уточной нити в горизонтальной плоскости  $X_1O_1X_3$  (рис. 2-в) будет находиться в равновесии, если со стороны каждой из основных нитей на площадке ее контакта с рассматриваемой уточиной будет действовать система нагрузок, проекция от которых на горизонтальную ось будет давать равнодействующую, равную по модулю  $P$ , но противоположную по направлению. Это следует из уравнений равновесия элемента нити.

В тех же сечениях со стороны основных нитей в вертикальной плоскости  $X_1O_1X_2$  (рис. 2-б) действуют равнодействующие  $F$  от проекций на вертикальную ось распределенной нагрузки  $Q_1^0$  и сил трения  $\tau_1$  (рис. 3). Кроме того, элемент уточной нити помимо растяжения и изгиба подвергается скручиванию под дейст-

\* Научный консультант – проф., докт. техн. наук Г.И. Чистобородов.

вием крутящих моментов  $M_{X_1}^I$  и  $M_{X_2}^{II}$  (рис.2-а), в основном обусловленных:

1) силами контактного трения  $\tau_1$  между уточиной и нитью основы (рис. 3);

2) распределенной нагрузкой  $p$ , передаваемой со стороны нити основы на прибаваемую уточную нить (рис.3).



Рис. 3

Для прибаваемой уточной нити и материала, из которого она состоит, принимаем те же допущения, что и в [1].

При выработке ткани на станках типа СТБ прокладывание уточины осуществляется при некотором начальном натяжении, поэтому можно считать, что до нагружения уточная нить в зеве имеет прямолинейную форму (считаем, что станок не оборудован механизмом

дозировки уточной нити). На челночных станках длина прокладываемой уточины превышает ширину проборки по берду, а нить к началу прибора имеет некоторую начальную кривизну.

Считаем начальную кривизну величиной второго порядка малости и ее влиянием на изменение величины изгибающих моментов будем пренебрегать.

Однако в дальнейшем при определении натяжения в прибаваемой уточине избыточная длина проложенной уточины будет учтена, если ткань вырабатывается на челночных станках, так же, как и начальное натяжение в ней при выработке ткани на бесчелночных станках.

Прибаваемая уточина под действием указанных выше силовых факторов находится в условиях сложного сопротивления, характеризующегося изгибом в двух плоскостях с одновременным действием кручения и растяжения. Деформированная ось нити представляет собой пространственную кривую.

В [2] получена система уравнений статического равновесия пространственно-криволинейного стержня (жесткой на изгиб и кручение нити) в проекциях на неподвижные оси в наиболее общем случае нагружения. Для прибаваемой уточины и нагрузок, действующих на нее, система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{dQ_{X_1}}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{dQ_{X_2}}{d\varepsilon} + F\delta(\varepsilon - \varepsilon_1) - F\delta(\varepsilon - \varepsilon_2) = 0, \\
 & \frac{dQ_{X_3}}{d\varepsilon} + P\delta(\varepsilon - \varepsilon_1) + P\delta(\varepsilon - \varepsilon_2) = 0, \\
 & \frac{dM_{X_1}}{d\varepsilon} + \frac{dx_2}{d\varepsilon} Q_{X_3} - \frac{dx_3}{d\varepsilon} Q_{X_2} + M_{X_1}^I \delta(\varepsilon - \varepsilon_1) - M_{X_1}^{II} \delta(\varepsilon - \varepsilon_2) = 0, \\
 & \frac{dM_{X_2}}{d\varepsilon} + \frac{dx_3}{d\varepsilon} Q_{X_1} - \frac{dx_1}{d\varepsilon} Q_{X_3} = 0, \quad \frac{dM_{X_3}}{d\varepsilon} + \frac{dx_1}{d\varepsilon} Q_{X_2} - \frac{dx_2}{d\varepsilon} Q_{X_1} = 0, \\
 & \frac{dx_1}{d\varepsilon} = \cos \psi_1 \cos \varphi_1, \quad \frac{dx_2}{d\varepsilon} = \cos \psi_1 \sin \varphi_1 \cos \vartheta_1 + \sin \psi_1 \sin \vartheta_1, \\
 & \frac{dx_3}{d\varepsilon} = \cos \psi_1 \sin \varphi_1 \sin \vartheta_1 - \sin \psi_1 \cos \vartheta_1, \\
 & M_{X_1} = A_{11}\chi_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_1 - A_{22}\chi_2 \sin \varphi_1 + A_{33}\chi_3 \sin \psi_1 \cos \varphi_1, \\
 & M_{X_2} = A_{11}\chi_1 (\cos \psi_1 \sin \varphi_1 \cos \vartheta_1 + \sin \psi_1 \sin \vartheta_1) + A_{22}\chi_2 \cos \varphi_1 \cos \vartheta_1 + \\
 & + A_{33}\chi_3 \sin \psi_1 \sin \varphi_1 \cos \vartheta_1 - \cos \psi_1 \sin \vartheta_1, \\
 & M_{X_3} = A_{11}\chi_1 (\cos \psi_1 \sin \varphi_1 \sin \vartheta_1 - \sin \psi_1 \cos \vartheta_1) + A_{22}\chi_2 \cos \varphi_1 \sin \vartheta_1 + \\
 & + A_{33}\chi_3 (\sin \psi_1 \sin \varphi_1 \sin \vartheta_1 + \cos \psi_1 \cos \vartheta_1), \\
 & \chi_1 = \frac{d\vartheta_1}{d\varepsilon} \cos \psi_1 \cos \varphi_1 - \frac{d\varphi_1}{d\varepsilon} \sin \psi_1, \quad \chi_2 = \frac{d\psi_1}{d\varepsilon} - \frac{d\vartheta_1}{d\varepsilon} \sin \varphi_1, \\
 & \chi_3 = \frac{d\varphi_1}{d\varepsilon} \cos \psi_1 + \frac{d\vartheta_1}{d\varepsilon} \sin \psi_1 \cos \varphi_1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  – текущая координата и координаты точек приложения внешних сосредоточенных сил и моментов;  $Q_{X_1}, Q_{X_2}, Q_{X_3}$  – проекции вектора внутренних усилий на координатные оси;  $\delta(\varepsilon - \varepsilon_1), \delta(\varepsilon - \varepsilon_2)$  – дельта-функции Дирака;  $M_{X_1}, M_{X_2}, M_{X_3}$  – проекции вектора внутренних моментов на оси координат;  $X_i$  – координаты точек оси нити после нагружения внешними силами ( $i=1, 2, 3$ );  $\varphi_1, \psi_1, \vartheta_1$  – углы, характеризующие положение жестко связанного с главными осями сечения нити базиса после

нагружения;  $A_{11}$  – жесткость нити при кручении;  $A_{22}, A_{33}$  – жесткость нити при изгибе относительно главных осей;  $\chi_1$  – кручение осевой линии нити после нагружения;  $\chi_2, \chi_3$  – кривизны оси нити в плоскостях, проходящих через главные оси поперечного сечения после нагружения;  $M_{X_1}^I, M_{X_1}^{II}$  – проекции векторов внешних сосредоточенных моментов на координатные оси, для которых в первом приближении имеем:

$$\sum_{k=1}^{\ell=2} M_{X_1}^{(k)} \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) = M_{X_1}^I \delta(\varepsilon - \varepsilon_1) + M_{X_1}^{II} \delta(\varepsilon - \varepsilon_2),$$

где  $M_{X_1}^I = M_{X_1}^{II} = \mu q_1^0 (s_1 - s_2) 0,5 d_y \eta_{yв} + P_1 h$ ;  $d_y, \eta_{yв}$  – диаметр уточной нити и коэффициент ее смятия по вертикали;  $\mu$  – коэффициент трения между нитями;  $q_1^0$  – распределенная нагрузка, действующая со стороны нити основы на прибываемую уточину (рис. 3);  $P_1$  – равнодействующая от распределенной нагрузки  $p$ , для которой имеем

$$P_1 = p(s_0 - s_2);$$

$s_0, s_1, s_2$  – координаты, определяющие действие распределенных нагрузок  $q_1^0$  и  $p$ , воспринимаемых прибываемой уточной со стороны основы (рис. 3);  $h$  – расстояние от линии действия силы  $P_1$  до центра  $O_1$  уточины (рис.3).

Силы  $P$  и  $F$ , действующие на прибываемую уточину, представляют собой равнодействующие проекции на соответственно горизонтальную и вертикальную оси всех сил, воспринимаемых уточной со стороны нити основы.

В результате, проецируя силы, приложенные к прибываемой уточине (рис.3), на эти оси, для  $P$  и  $F$  получим:

$$P = p(s_0 - s_2) - \mu \int_{s_2}^{s_0} p \sin \varphi \cos \varphi ds - \int_{s_2}^{s_1} q_1^0 \sin \varphi ds + \mu \int_{s_2}^{s_1} q_1^0 \cos \varphi ds, \quad (2)$$

$$F = \int_{s_2}^{s_1} q_1^0 \cos \varphi ds + \mu \int_{s_2}^{s_1} q_1^0 \sin \varphi ds - \mu \int_{s_2}^{s_0} p \sin^2 \varphi ds, \quad (3)$$

где  $s, \varphi$  – текущие координаты и угол поворота поперечного сечения основы [1].

Для решения системы уравнений (1) необходимо определить краевые условия для рассматриваемого пространственного случая деформации элемента уточной нити.

С этой целью рассмотрим проекции нити на координатные плоскости  $X_1O_1X_2$  и  $X_1O_1X_3$  (рис. 2-а, б).

Необходимо отметить, что рассматриваемый элемент нити находится в таком же на-

пряженном и деформированном состоянии, обусловленном приложенной к нему системой внешних и внутренних сил, что и любой другой аналогичный элемент нити слева или справа от рассматриваемого в центральной зоне опушки ткани.

Учитывая вышесказанное, а также то, что в смежных сечениях внутренние силовые факторы должны уравниваться, приходим к выводу, что силы и моменты, действующие в сечениях, проходящих через точки  $O_1$  и  $O_2$ , равны

по величине и противоположны по направлению.

Принимаем также, что сечения нити в точках  $O_1$  и  $O_2$  не могут перемещаться по горизонтали, а следовательно, перемещения точек оси нити в направлении координатных осей  $X_2, X_3$  будут обуславливаться ее растяжением.

При пространственной деформации нити в каждом из краевых сечений в общем случае действуют проекции на координатные оси внутренних усилий  $Q_{X_1}, Q_{X_2}, Q_{X_3}$ , изгибающих моментов  $M_{X_2}, M_{X_3}$  и крутящего момента  $M_{X_1}$ .

Для проекции на ось  $X_3$  вектора внутренних сил имеем:

$$\text{при } X_1=0 \quad Q_{X_3} = P; \quad X_1 = 2L_0; \quad Q_{X_3} = -P, \quad (4)$$

где  $L_0$  – геометрическая плотность ткани по основе.

Для проекции вектора изгибающего момента на ось  $X_3$ , учитывая, что точки  $O_1$  и  $O_2$  являются точками перегиба, получаем:

$$\text{при } X_1=0 \quad M_{X_3} = 0; \quad X_1 = 2L_0; \quad M_{X_3} = 0. \quad (5)$$

Из уравнений равновесия для отрезка нити (рис. 2-б) в виде равенства нулю сумм моментов всех сил относительно точек  $O_1, O_2$  следует:

$$\text{при } X_1=0; \quad X_1 = 2L_0 \quad Q_{X_2} = \frac{F}{2}. \quad (6)$$

Учитывая, что  $Q_{X_1}$  и  $Q_{X_2}$  в краевых сечениях лежат в одной плоскости ( $Q_{X_3}$  перпендикулярна этой плоскости), и записывая уравнения проекций этих сил на касательную  $v$  к оси нити в точках  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 2-б), имеем:

$$\begin{aligned} X_1 = 0; \quad X_1 = 2L_0; \\ N^y = Q_{X_1} \cos \varphi_0 + Q_{X_2} \sin \varphi_0, \quad (7) \end{aligned}$$

откуда с учетом (6) получаем

$$Q_{X_1} = \frac{1}{\cos \varphi_0} \left( N^y - \frac{F}{2} \sin \varphi_0 \right), \quad (8)$$

где  $N^y, \varphi_0$  – соответственно осевое усилие и угол наклона к оси  $X_1$  касательных к осевой линии нити в точках  $O_1$  и  $O_2$ .

Получим выражение для  $N^y$  при выработке ткани на станках типа СТБ.

Пусть прямолинейный до нагружения силами элемент нити между точками  $O_1$  и  $O_2$  имел некоторое начальное натяжение. Под действием усилий  $P$  и  $F$  нить продеформируется и ее длина в пространстве станет равной  $\varepsilon$ .

Для полной относительной деформации нити  $\lambda_1$  в первом приближении имеем:

$$\lambda_1 = \lambda_{\text{нач}} + \frac{\varepsilon}{2L_0} - 1, \quad (9)$$

где  $\lambda_{\text{нач}}$  – начальная относительная деформация нити.

Считая, что для рассматриваемой нити справедлива линейная зависимость усилие – деформация, получим:

$$\begin{aligned} N^y &= E_y S_y \lambda_1 = E_y S_y \left( \lambda_{\text{нач}} + \frac{\varepsilon}{2L_0} - 1 \right) = \\ &= N_{\text{нач}}^y + E_y S_y \left( \frac{\varepsilon}{2L_0} - 1 \right), \quad (10) \end{aligned}$$

где  $E_y, S_y$  – модуль жесткости нити при растяжении и площадь ее поперечного сечения;  $N_{\text{нач}}^y = E_y S_y \lambda_{\text{нач}}$  – начальное натяжение нити до прибора.

Два оставшихся краевых силовых фактора – изгибающий  $M_{X_2}$  и крутящий  $M_{X_1}$  моменты не могут быть определены с помощью уравнений равновесия.

Учитывая, что сумма высот волн изгиба нити основы и прибываемой уточины равна сумме их диаметров с учетом смятия, получим

$$h_1^o + h_1^y = d_0 \eta_{OB} + d_y \eta_{yB}, \quad (11)$$

где  $h_1^o$  – высота волны изгиба основной нити (рис. 3);  $h_1^y$  – высота волны изгиба прибываемой уточины в плоскости  $X_1 O_1 X_2$  (рис. 2-б);  $d_0, \eta_{OB}$  – диаметр основы и коэффициент ее смятия в вертикальной плоскости.

## ВЫВОДЫ

Получена математическая модель (1) равновесия прибываемой уточной нити в зоне формирования однослойной ткани полотняного переплетения при крайнем переднем положении берда, а также соотношения (2), (3), (11), связывающие ее с математической моделью равновесия основной нити [1].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов С.Г. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, № 1. С.47...51.
2. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. – М.: Машиностроение, 1982.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 17.04.06

---

