УДК[677.075:62]:620.174

СИЛОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЕТЕЛЬ С ВИТКАМИ

В.П. ЩЕРБАКОВ, В.А. ЗАВАРУЕВ, О.Н. ЛАКЕЕВА, О.С. КОТОВИЧ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

В [1] описаны структура и способ получения кулирного трикотажа, состоящего из петель, игольные дуги которых содержат дополнительный виток, образованный обкручиванием нитью иглы при прокладывании. Такой трикотаж обладает минимальной закручиваемостью и распускаемостью по сравнению с обычной кулирной гладью. Там же отмечено, что виток является составной частью игольной дуги основной петли. Его форма и размеры определяют параметры петельной структуры, а сам виток отклоняется в противоположную сторону остова петли.

Можно считать, что в условиях большой жесткости нитей возникает пространственная структура. Именно пространственное расположение арматуры слоистых и волокнистых композитов привлекает внимание специалистов в области композиционных материалов. Введение пространственного каркаса позволяет значительно улучшить характеристики композитов, увеличить сопротивление сдвигу и поперечному отрыву, повысить долговечность материала.

В предлагаемой статье дается математическое описание формы петли с витками методами геометрически нелинейной упругой нити, силовое взаимодействие петель между собой, вычисляются форма и размеры витка, определяется перемещение витка.

Расчеты проведены для петель, образованных из медной проволоки с довольно большой жесткостью. Именно здесь в явном виде проявляются особенности пространственного расположения основных петель и витков. Уравнения, формулы и результаты могут быть распространены на любые нити.

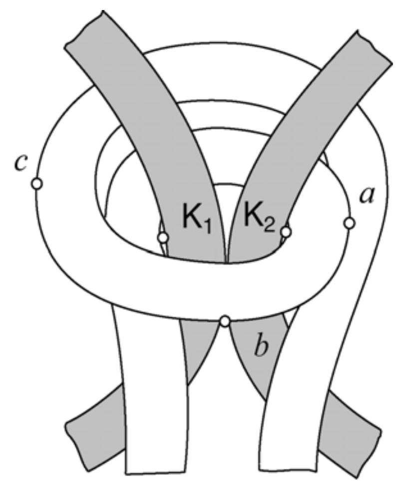


Рис. 1

На рис. 1 представлены петли с витками, которые взаимодействуют друг с другом в области контакта.

Детальное изучение структуры петель с витками и анализ петлеобразования позволяет считать, что петли взаимодействуют между собой в двух точках K_1 и K_2. Стремление деформированной при вязании упругой нити восстановить естественную форму приводит к возникновению усилий, действующих в области контакта смежных петель. Результирующей распределенных здесь сил является сила P, которая так же, как и сила трения между нитями контактирующих петель, есть результат взаимодействия двух соприкасающихся петель.

Реальная область контакта расположена вне осевой линии упругой нити. Но именно для осевой линии написаны все уравнения равновесия, и на осевой линии размещена точка, обозначенная на рис. 2 как точка O, которая принадлежит линии действия силы P и которую условно назовем точкой контакта.

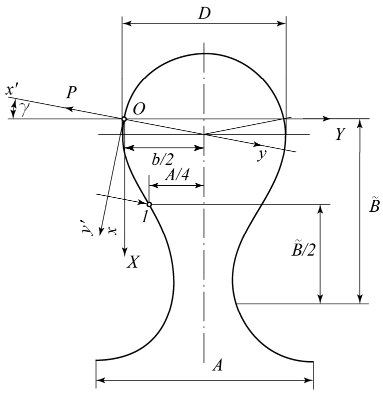


Рис. 2

Направление и величина силы P неизвестны. Скольжению нитей относительно друг друга препятствует сила трения. Хотя роль трения и важна, в нашей задаче нет необходимости определять ее величину. Использование принятого в специальной литературе соотношения γ=arctg k, где γ – угол между касательной в точке O и направлением петельных столбиков; k – коэффициент трения нить о нить, некорректно.

Во-первых, на сегодняшний день существует большое число методов, способов и средств определения коэффициента трения. Дать точную оценку величины k невозможно, по крайней мере, в нашем случае. Приближенное же определение коэффициента трения делает бессмысленным то уточнение, которое дает предлагаемый здесь метод расчета по сравнению с распространенным в технологии трикотажа геометрическим подходом.

Во-вторых, угол γ, являющийся по существу углом трения, связан не с реальной нитью, а с воображаемой нематериальной осевой линией и неравен действительному углу трения.

Рассмотрим рис. 2. В силу симметрии петли длина нити в ней [2]:

$$L = 4\left[\ell + \left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)D\right] + \pi D. \qquad (1)$$

Здесь ℓ – длина упругой линии O1; D – диаметр окружности, являющейся формой игольной дуги и витка. Величины ℓ, γ, D неизвестны и подлежат определению.

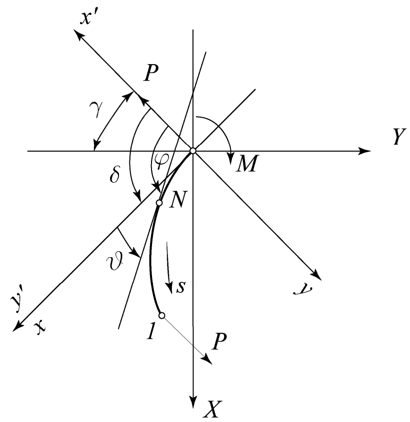


Рис. 3

Исследуем равновесие упругой линии O1 (рис.3).

В точке O введем три системы координат.

1. Систему x'y', ориентированную по направлению силы, приложенной в начальной точке O.

2. Систему координат xy, ориентированную по касательной и нормали к упругой линии в начальной точке O.

3. Систему координат XY, ориентированную соответственно по направлениям петельных столбиков и петельных рядов.

Точное уравнение равновесия упругой линии в системе x'y' записывается в безразмерном виде [3]:

$$\ell^2 \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\omega^2 \sin^2 \varphi. \qquad (2)$$

Здесь $\omega = \sqrt{\dfrac{P\ell^2}{H}}$ – безразмерный силовой коэффициент подобия (H – жесткость нити при изгибе).

Обозначим через F(α) эллиптический интеграл первого рода:

$$F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}.$$

После интегрирования уравнения (2) получим

$$\omega\frac{s}{\ell}=F(\alpha)-F(\alpha_0). \qquad (3)$$

Запишем форму упругой линии в координатах x'(s) и y'(s):

$$\frac{x'}{\ell}=\frac{2}{\omega}\left[E(\alpha)-E(\alpha_0)\right]-\frac{s}{\ell},$$

$$\frac{y'}{\ell}=\frac{2}{\omega}k(\cos\alpha_0-\cos\alpha). \qquad (4)$$

Здесь через E(α) обозначен эллиптический интеграл второго рода:

$$E(\alpha)=\int_0^{\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2}d\alpha.$$

Перейдем к системе координат xy. Получим

$$\frac{x}{\ell}=\frac{x'}{\ell}\cos\delta+\frac{y'}{\ell}\sin\delta,$$

$$\frac{y}{\ell}=\frac{y'}{\ell}\cos\delta-\frac{x'}{\ell}\sin\delta. \qquad (5)$$

Рассмотрим граничные условия для рассматриваемой упругой нити. В концевой точке 1 упругой линии отсутствует изгибающий момент, поэтому кривизна $\frac{d\varphi}{ds}$ здесь равна нулю. С учетом предыдущего положения о нулевой кривизне в точке 1 будем иметь:

$$2k\cos\alpha_1=0. \qquad (6)$$

Кроме того, в данной схеме изгиба $\vartheta_0 = 0$ и $\delta = 90°$. Примем во внимание, что $\varphi = \vartheta+\delta$. Так как $\varphi = 2\arcsin(k\sin\alpha)$, то второе граничное условие дает

$$k\sin\alpha_0=\sin 45°. \qquad (7)$$

Для определения третьего эллиптического параметра имеем

$$F(\alpha_1)-F(\alpha_0)=\sqrt{\frac{P\ell^2}{H}}. \qquad (8)$$

Три уравнения (6)…(8) определяют три эллиптических параметра – модуль эллиптического интеграла k, его амплитуды α_0 и α_1 =90°.

Если в нашей задаче $\delta = 90°$, то имеем x = y' и y = -x'.

Переход к системе координат X, Y определится формулами

$$\frac{X}{\ell}=\frac{x}{\ell}\cos\gamma+\frac{y}{\ell}\sin\gamma,$$

$$\frac{Y}{\ell}=\frac{y}{\ell}\cos\gamma-\frac{x}{\ell}\sin\gamma. \qquad (9)$$

Уточненный расчет формы и длины нити в петле должен предусматривать учет двоякой кривизны нити в петле, возникающей вследствие перехода нити с лицевой стороны на изнаночную и обратно. При этом основные уравнения и формулы плоской петли распространяются на пространственную нить.

Если высота петельного ряда реального трикотажа равна B, то для плоской петли этот параметр определится выражением $\widetilde{B}=\frac{B\psi}{\sin\psi}$, где ψ – угол между касательной в точке контакта O и плоскостью полотна.

Координата концевой точки 1: $X_1=\frac{\widetilde{B}}{2}$.

Вторая координата определяется из соотношения $A=2\left(b-\frac{d}{\cos\gamma}\right)$, где A– петельный шаг; b – ширина петли в точке контакта O; d – диаметр нити.

С учетом b = Dcosγ получаем координату концевой точки 1:

$$Y_1 = \frac{d}{2\cos\gamma}.$$

Диаметр игольной дуги D вычисляется из моментного коэффициента подобия

$$\beta_0 = \frac{M_0}{\sqrt{PH}}:$$

$$D = \frac{H}{k\cos\alpha_0\sqrt{PH}}.$$

Таким образом, для вычисления пяти неизвестных P, ℓ, k, α_0, γ запишем пять уравнений:

$$k\sin\alpha_0 = 0{,}707,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} - \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{P\ell^2}{H}},$$

$$\frac{\widetilde{B}}{2\ell} = \frac{2}{\sqrt{\frac{P\ell^2}{H}}} k\cos\alpha_0\cos\gamma + \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\frac{P\ell^2}{H}}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2}d\alpha - \int_0^{\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2}d\alpha\right)\right]\sin\gamma,$$

$$\frac{d}{2\ell\sin\gamma} = \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\frac{P\ell^2}{H}}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2}d\alpha - \int_0^{\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2}d\alpha\right)\right]\cos\gamma - \frac{2}{\sqrt{\frac{P\ell^2}{H}}} k\cos\alpha_0\sin\gamma,$$

$$L = 4\left[\ell + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\frac{H}{2k\cos\alpha_0\sqrt{PH}}\right] + \frac{\pi H}{k\cos\alpha_0\sqrt{PH}}.$$

Кулирный трикотаж с длиной нити в петле L = 30 мм, петельным шагом A = 5 мм и высотой петельного ряда B = 4 мм выработан из медной проволоки диаметром d=0,8 мм, состоящей из тридцати элементарных проволок диаметром 75 мкм.

Жесткость одной элементарной проволоки при модуле упругости $E = 1{,}1\cdot10^7\frac{сН}{мм^2}$ и осевом моменте инерции $I = \frac{\pi d^4}{64} = 1{,}553\cdot10^{-6}$ мм^4 принимает значение H_1=EI = 17,08 сН·мм^2. Проволока лишь слегка подкручена, поэтому ее жесткость равна сумме жесткостей составляющих 30 элементарных проволок – H_1=512,5 сН·мм^2.

Высота петельного ряда плоской петли $\widetilde{B}$, если угол ψ = 29,7° [2], составляет 4,2 мм.

Численное решение приведенной выше системы уравнений дает: P = 143,061 сН; ℓ = 2,171 мм; k = 0,879; α_0 = 0,934рад; γ = = 0,197 рад.

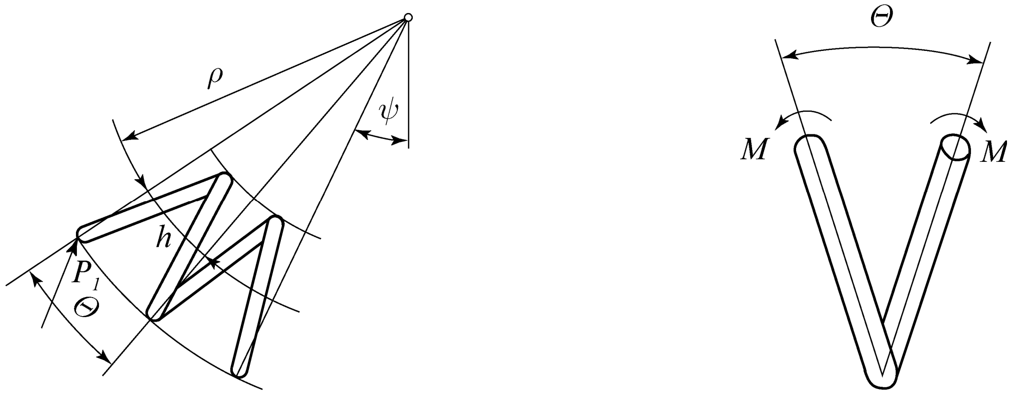
Диаметр витка:

$$D = \frac{512{,}5}{0{,}879\cdot\cos0{,}934\cdot\sqrt{143{,}061\cdot512{,}5}} 3{,}621 \text{ мм}.$$

Экспериментально определенная величина диаметра витка D = 3,8 мм.

Сравнение полученного нами значения диаметра с действительным показывает соответствие отображения изучаемого нового трикотажа с витками в математическом аппарате.

Теперь, когда известны сила контактного взаимодействия петель P и ее направление γ, решим задачу о пространственном деформировании дополнительного витка. Следует найти величину его перемещения относительно плоскости полотна, а более конкретно, найти перемещение точки b (рис. 1).



а) б)

Рис. 4

Два витка, основной и дополнительный, образуют пружину с углом подъема витка $\beta = \mathrm{arctg}\dfrac{h}{\pi D}$ (h – шаг пружины), которая нагружается поперечной силой P_1, обусловленной силой P (рис. 4).

Величина поперечной силы определится соотношением

$$P_1 = \frac{P\sin\gamma}{\cos(\beta+\psi)}.$$

Жесткость этой пружины на изгиб вычисляется в зависимости от взаимного поворота витков (рис. 4-а). Кроме изгибных перемещений виткам присущи перемещения сдвига в плоскости изгиба.

Если виток выделить сечениями, то в концевых сечениях витков возникают силы и моменты. Их величины определяются из условий равновесия [4]. Момент M создает взаимный поворот сечений на угол θ (рис. 4-б).

Прогиб пружины, нагруженной поперечной силой, равен

$$f = f_и + f_{сдв}.$$

Изгибное перемещение

$$f_и = \frac{P_1\ell^3}{3C_и}.$$

Здесь ℓ – длина пружины; $C_и = \dfrac{E_{пр}d^4\ell}{32Dn(2+\mu)}$

($E_{пр}$ – модуль упругости проволоки; n – число витков; μ – коэффициент Пуассона).

Перемещение сдвига определяется формулой

$$f_{сдв} = \frac{P_1\ell}{C_{сдв}}, \text{ в которой } C_{сдв} = \frac{E_{пр}d^4\ell}{8D^3n}.$$

Геометрические и упругие характеристики пружины найдены экспериментально. Проволока наматывалась на цилиндр диаметром 2 мм под натяжением, обеспечивающим прилегание витков друг к другу и к цилиндру, и это положение проволоки фиксировалось.

По истечении 20 мин, когда закончилась релаксация напряжений в проволоке, пружина разгружалась. Измерялись диаметр пружины и ее шаг. В нашем случае $D_э$ = 3,6 мм и h = 1,8 мм. Отсюда вычисляется длина пружины ℓ = nh =2·1,8 = 3,6 мм.

Испытания проволоки на растяжение проведены на машине FP-100/10. При разрывной нагрузке 32 Н, площади поперечного сечения тридцати элементарных проволок 0,132 $мм^2$ и деформации ε =0,15 модуль упругости $E_{пр} = 161613\ \dfrac{сН}{мм^2}$.

Вследствие того, что проволока представляет собой совокупность отдельных элементарных проволок, коэффициент Пуассона можно принять равным μ = 0,5.

Приведем численные значения силовых, жесткостных и геометрических характеристик петли с витком: P_1 = 35,9 сН;

β = 9,1°; $C_и$ = 411,3 сН·мм^2; $C_{сдв}$ = =313,7 сН·мм^2; f = 1,8 мм. Величина перемещения f точки b относится к осевой линии дополнительного витка. Наклон витка к плоскости полотна составляет $\arcsin\frac{1{,}8}{3{,}621}+29{,}7=59^\circ$.

ВЫВОДЫ

На аналитическом уровне вычислено усилие контактного взаимодействия петель, величина которого довольно значительна и обусловлена формой нити и ее упругими свойствами. Получены значения смещения и угла наклона дополнительного витка, необходимые для моделирования и проектирования гибких и жестких композитов. Изложенная методика расчета вследствие аналитического подхода к решению поставленных задач может быть распространена на любые нити и большую часть кулирного трикотажа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудрявин Л.А., Заваруев В.А., Викторов В.Н., Лакеева О.Н.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2005, №2. С. 66…68.
2. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити. – М.: РИО МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2001.
3. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986.
4. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука. 1996.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 05.04.06.