УДК 677.017.622:532.546.3

ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДА РАСЧЕТА ВОЗДУХОПРОНИЦАЕМОСТИ ВОЛОКНИСТОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ОРИЕНТАЦИИ ВОЛОКОН

И.П. КОРНЮХИН, И.В. КОЗЫРЕВ, Т.А. КОРНЮХИНА, С.А. МИРОНОВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Ранее в [1] было показано, что воздухопроницаемость волокнистого слоя зависит от его эффективной плотности и параметра ориентации. Сравнительно просто можно найти эту зависимость для разреженного (с позиций гидродинамики) волокнистого слоя. Согласно решению Ландау – Лифшица [2] ширина y следа (области в направлении течения x, где скорость заметно падает) за обтекаемым телом при ламинарном режиме определяется формулой:

$$y / x = 1 / \sqrt{Re}\,, \qquad (1)$$

где Re =wd/ν – число Рейнольдса; w – скорость потока жидкости (газа), набегающего на тело; d – определяющий размер, диаметр цилиндра; ν – кинематическая вязкость воздуха.

Если расстояние между волокнами в слое заметно превышает ширину следа, то слой можно считать разреженным, обтекание отдельных волокон в слое рассматривать как независимое, а суммарную силу, действующую на весь слой, можно определять суммированием по отдельным волокнам.

Дадим грубую оценку расстоянию между волокнами. Объем пористой среды, приходящийся на одно волокно, охарактеризуем как $V_1 = V/N$, где N – количество волокон в объеме V. В свою очередь, количество волокон оценим по объему V_f твердой фазы волокон $N = V_f/V_0$, V_0 – объем одного волокна. Учтем, что пористость определяется, как

$$\varepsilon = 1 - V_f / V . \qquad (2)$$

Из приведенных формул найдем, что $V_1/V_0 = (1 - \varepsilon)^{-1}$. Предположим, что окружающий волокно объем V_1 и само волокно имеют цилиндрическую форму с диаметрами D и d соответственно. При их одинаковой длине ℓ найдем $D^2/d^2 = (1 - \varepsilon)^{-1}$. При пористости $\varepsilon \geq 0,9$, характерной для рассматриваемых случаев, найдем $D/d > 3$.

Принятое предположение, что окружающий волокно объем является цилиндрическим, ни в коей мере не следует рассматривать как строгое ограничение. Действительно, для извитого волокна та же самая связь между D и d будет прослеживаться на бесконечно малом его участке.

При значениях чисел Рейнольдса $Re \approx 1$, характерных для рассматриваемой задачи расчета воздухопроницаемости, из формулы (1) следует оценка $y/x \approx 1$.

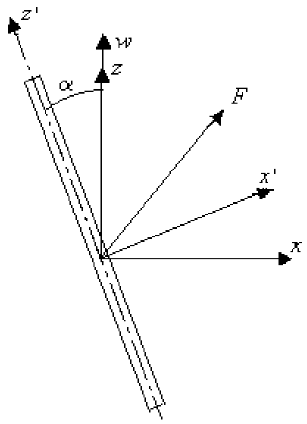

Рис. 1

Таким образом, при рассматриваемых значениях пористости влиянием следа за предшествующим волокном на закономерности обтекания следующего волокна можно пренебречь. В этих условиях подход к расчету силы сопротивления волокнистого слоя, как суммы сил сопротивления, действующих на отдельные волокна, представляется оправданным.

Рассмотрим силу сопротивления, действующую на одиночный цилиндр в соответствии с подходом, представленным в [3]. На рис. 1 представлен отрезок волокна, наклоненный под углом α к заданному направлению движения, определяемому вектором скорости w потока и осью z. Результирующая сила F, действующая на волокно в потоке, может быть представлена геометрической суммой двух сил – силы сопротивления вдоль волокна, действующая по оси z', и поперечной, действующей по оси x' (рис. 1).

Согласно [3] силу F, действующую на цилиндр единичной длины, можно представить как:

$$F = \mu k w , \qquad (3)$$

где к – диадик (трансляционный тензор II ранга) сопротивлений; μ – динамическая вязкость.

Составляющую силы сопротивления F вдоль оси z можно выразить [3] через коэффициенты сопротивления $K_\parallel$ и $K_\perp$ при обтекании цилиндра в направлении вдоль и поперек образующей соответственно:

$$F_\alpha = \mu w \left(K_\perp \sin^2 \alpha + K_\parallel \cos^2 \alpha \right), \qquad (4)$$

где в обозначении F_α подчеркивается, что волокно ориентированно под углом α к направлению движения.

Сила, действующая на волокна в направлении оси x, несущественна, так как она не дает вклада в сопротивление волокнистого слоя. К тому же благодаря симметрии углового распределения волокон суммарная сила, действующая на весь волокнистый слой в направлении оси x, будет пренебрежимо малой.

При поперечном обтекании круглого цилиндра неограниченным потоком жидкости при малых числах Рейнольдса в [4] получена формула для силы сопротивления, которая позволяет представить поперечную составляющую $K_\perp$ в виде:

$$K_\perp = 8\pi\varphi r / \left[\ln(2\varphi) + 0{,}5\right]. \qquad (5)$$

Для представления продольной составляющей в [3] рекомендуется уравнение, полученное при продольном обтекании неограниченным потоком также при малых числах Рейнольдса тела типа иглы, тонкого веретена:

$$K_\parallel = 4\pi\varphi r / \left[\ln(2\varphi) - 0{,}5\right]. \qquad (6)$$

В этих формулах $\varphi = \ell/(2r)$; ℓ – длина цилиндра; r – радиус цилиндра.

Обе эти формулы получены путем решения уравнений Навье – Стокса при обтекании указанных тел неограниченным потоком жидкости (газа).

В [5] получены значения коэффициентов $K_\perp$ и $K_\parallel$ при обтекании шероховатого цилиндра в пористой среде. Для того, чтобы воспользоваться этими рекомендациями, необходимо знать характеристики шероховатости каждого цилиндра.

Реально поперечное сечение подавляющего большинства волокон отлично от круглого, а характеристики шероховатости неизвестны, что не позволяет использовать указанные рекомендации. В связи с этим в уравнение (4) вместо $K_\perp$ и $K_\parallel$ вводятся их эмпирические аналоги $\chi_\perp$ и $\chi_\parallel$, которые будут определены при сравнении расчетного уравнения с опытными данными.

Таким образом, для представления силы сопротивления, действующей на волокна общей длины ℓ_o, ориентированные под углом α к оси, вместо уравнения (4) воспользуемся уравнением

$$F_\alpha = 2\pi\mu\ell_o\,\ell(\alpha)w\left(\chi_\perp \sin^2\alpha + \chi_\parallel \cos^2\alpha\right). \qquad (7)$$

Здесь $\ell_o\ell(\alpha)$ – доля волокон, ориентированных под углом α к оси z (рис.1). Сомножитель 2 появляется в формуле (7) в связи с тем, что учитывается ориентация волокон под углом α и симметричных относительно оси участков волокон, ориентированных под углом $\pi - \alpha$.

Функция плотности углового распределения $\ell(\alpha)$ описывается полученным ранее в [6] уравнением и воспроизводится ниже с формальной заменой параметра распределения λ параметром ориентации γ: ($\gamma \equiv \lambda$):

$$\ell(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\gamma^2 \sin\alpha}{\sqrt{\left(\gamma^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^3}}\,. \qquad (8)$$

Общая длина волокон ℓ_o рассчитывается по массе волокнистого образца:

$$\ell_o = M/(\rho_f f_f); \quad \ell_o = \rho_э SL/(\rho_f f_f) \equiv \rho_э \pi D^2 L/(4\rho_f f_f) \equiv \rho_э D^2 L/(\rho_f d^2), \qquad (9)$$

где M – масса волокна; ρ_f – плотность материала; f_f – площадь сечения волокна; $\rho_э$ – эффективная плотность, масса материала в образце, отнесенная ко всему объему; L – длина канала, в котором располагается волокнистый образец; S – площадь сечения канала; D – диаметр канала; d – диаметр волокна.

Для определения силы, действующей на образец с произвольной ориентацией волокон, получим интегральное выражение:

$$F = \int_0^\pi F_\alpha d\alpha\,. \qquad (10)$$

Подстановка выражений (8) и (9) в формулу (7) с последующим интегрированием уравнения (10) согласно [7] дает уравнение для определения силы, действующей на волокна в направлении оси z (рис. 1) в зависимости от параметра ориентации:

$$F = 2\pi\mu w \frac{\rho_э SL}{\rho_f f_f} f(\gamma), \qquad (11)$$

где $f(\gamma)$ – функция, характеризующая ориентацию волокон, определяемую величиной вычисленного интеграла. При значениях $\gamma > 1$, характерных для случаев растяжения образца с отсутствием преимущественной ориентации в исходном состоянии, функция $f(\gamma)$ имеет вид

$$f(\gamma) \equiv \chi_\perp + (\chi_\parallel - \chi_\perp) \frac{\gamma^2}{\left(\sqrt{\gamma^2 - 1}\right)^3} \left[\sqrt{\gamma^2 - 1} - \arcsin \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \right], \qquad (12)$$

при $\gamma < 1$ (сжатие образца) вычисление интеграла в уравнении (10) согласно [7] дает

$$f(\gamma) \equiv \chi_\perp + (\chi_\parallel - \chi_\perp) \frac{\gamma^2}{\left(\sqrt{1 - \gamma^2}\right)^3} \left[\sqrt{1 - \gamma^2} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} \right]. \qquad (13)$$

Графики полученных функций $f(\gamma)$ (12) и (13) приведены на рис. 2 и 3.

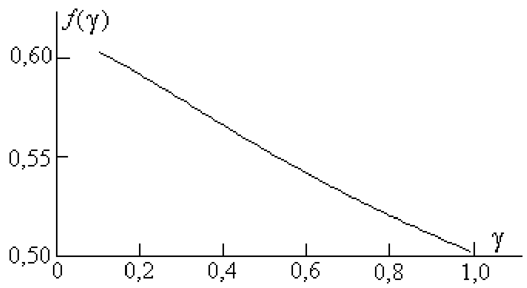

Рис. 2

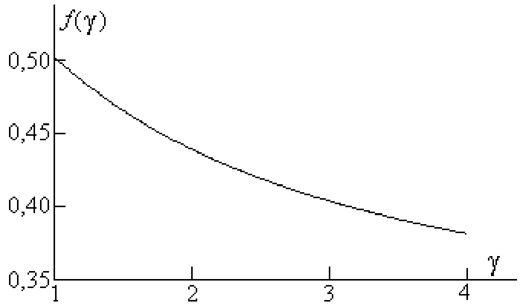

Рис. 3

Падение давления Δp при прохождении потока воздуха через канал площадью сечения S при силе сопротивления F определяется выражением

$$\Delta p = F/S. \qquad (14)$$

Сделав подстановку формулы (14) в уравнение (11) и приведя его к безразмерной форме, получим

$$\frac{\Delta p \rho_f f_f}{L 2\pi \mu \rho_{ý} w} = f(\gamma). \qquad (15)$$

В уравнение (15) входит средняя скорость движения воздуха в межволоконном пространстве w, связанная со скоростью w_0, приведенной к полному сечению канала соотношением

$$w\varepsilon = w_0, \qquad (16)$$

где ε – пористость материала.

Уравнение (16) неявно предполагает равенство доли сечения свободного для прохода воздуха величине пористости, характеризуемой как доля пустот в образце

$$\varepsilon = \varepsilon_V = \varepsilon_S, \qquad (17)$$

где ε_V – объемная пористость, определенная формулой (2); ε_S – пористость в сечении канала.

Продемонстрируем справедливость уравнения (17). Покажем, что определенная формулой (2) объемная пористость преобразуется к виду $\varepsilon_V = 1 - \rho_э/\rho_f$.

В соответствии с формулой (9) представим общую длину волокон в виде $\ell_o = L(1 - \varepsilon_V)D^2/d^2$, где d – диаметр волокна. Общее число волокон (каждое длиной ℓ) при этом будет равно $Z = \ell_o/\ell \equiv L(1 - \varepsilon_V)D^2/(\ell d^2)$.

Рассмотрим произвольное положение

волокна длиной ℓ, наклоненного к оси цилиндра под произвольным углом α в канале цилиндрической формы. Проекция такого волокна на ось цилиндра равна $\ell_1=\ell\cos\alpha$, а площадь его поперечного сечения плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, составит $f_l = f_f/\cos\alpha$.

Мысленно представим цепочку, состоящую из одиночных волокон определенной ориентации, расположенной вдоль канала по длине L. Количество волокон в такой цепочке составит $z=L/(\ell_1)\equiv L/(\ell\cos\alpha)$. Таким образом, число волокон в поперечном сечении канала будет равно $n = Z/z$, а их суммарная площадь определится как $F_f= nf_l \equiv f_lZ/z$, или:

$$F_f = \frac{nf_f}{\cos\alpha} = \frac{D^2\left(1-\varepsilon_V\right)\cos\alpha}{d^2}\frac{\pi d^2}{4\cos\alpha} = \frac{\pi D^2}{4}\left(1-\varepsilon_V\right). \tag{18}$$

Учитывая определение ε_S как доли пустот в сечении пористого тела $\varepsilon_S=(S - F_f)/S\equiv$ $\equiv (\pi D^2-4F_f)/(\pi D^2)$ и используя соотношение (18), завершим доказательство равенства (17).

Коэффициент проницаемости k пористого тела связан с приведенной скоростью воздуха в канале и градиентом давления законом Дарси:

$$w_0 = \frac{k}{\mu}\frac{\Delta p}{L}. \tag{19}$$

С учетом зависимостей (16), (17) и (19) выражение (15) примет следующий вид:

$$N = f(\gamma), \tag{20}$$

где безразмерный параметр N, характеризующий сопротивление проницаемости:

$$N = \frac{\rho_f f_f \varepsilon}{2\pi\rho_y k}. \tag{21}$$

Уравнение (20) с учетом определений (12) и (21) сопоставлено на рис. 4 с опытными данными, полученными в [1].

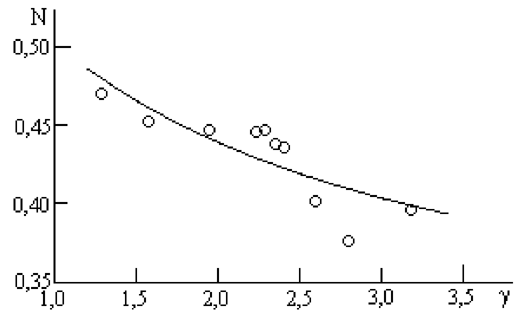

Рис. 4

Методом обобщенной линейной регрессии, реализованной в программе MathCAD, были найдены значения коэффициентов $\chi_\perp$ и $\chi_\|$, которые оказались равными $\chi_\perp = 0{,}610$ и $\chi_\| = 0{,}284$. Эти коэффициенты отличаются приблизительно в два раза. Заметим, что примерно такое же отношение характерно и для коэффициентов $K_\perp$ и $K_\|$, определяемых формулами (5), (6) с учетом того, что $\varphi >> 1$.

Кроме того, полученные в [5] решения уравнения Бринкмана для случая обтекания шероховатого цилиндра в пористой среде, дают значения коэффициентов сопротивления в направлениях, перпендикулярном и параллельном оси, также отличающихся в два раза. Эти факты представляют собой косвенное подтверждение надежности предложенного метода.

ВЫВОДЫ

Разработан согласующийся с опытными данными метод расчета воздухопроницаемости слоя волокон в зависимости от его эффективной плотности и параметра ориентации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корнюхин И.П. и др.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, №2. С.25…29.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
3. *Хаппель Дж., Бренер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976.
4. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.: ОГИЗ, 1947.
5. *Черняков А.Л., Кирш А.А.* // Коллоидный журнал. – 2001. Т.63, № 4.
6. *Kornoohin I.P., Kornoohina T.A.* // Research Journal Textile and Apparel. – (Hong Kong), V.6, №2, 2002.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981.

Рекомендована кафедрой промышленной теплоэнергетики. Поступила 19.01.06.