

УДК 677.021

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГИБКОЙ НИТИ
С ШЕРОХОВАТЫМ ЦИЛИНДРОМ**

С.Н. РАЗИН, А.Г. ГРИШИН, Н.И. КОВАЛЕНКО

(Костромской государственный технологический университет)

Часто, при исследовании взаимодействия гибкой нити (ленты) с шероховатым цилиндром, используется формула Эйлера, которая связывает силы натяжения нити в ведомой и ведущей ветвях, и для случая предельного состояния равновесия имеет

вид:

$$T_1 = T_0 \exp(f\varphi), \quad (1)$$

где T_1, T_0 – силы натяжения в ведущей и

ведомой ветвях нити; f – коэффициент трения нити о поверхность цилиндра; φ – угол обхвата нитью цилиндра.

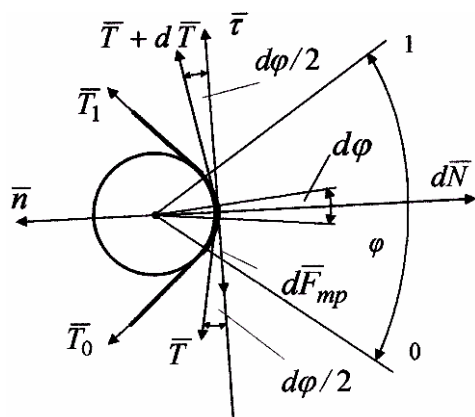


Рис. 1

Однако при этом забывают о тех допущениях, которые были сделаны при выводе этой формулы. В действительности, решением системы уравнений проекций сил на касательную и нормаль (рис. 1), действующих на выделенный элемент нити:

$$\begin{cases} T \, d\varphi = dN, \\ dT = f \, dN, \end{cases} \quad (2)$$

будет зависимость (1) только в том случае, если коэффициент трения f – величина постоянная. Согласно исследованиям [1] коэффициент трения нити и других волокнистых продуктов о шероховатую поверхность зависит от многих факторов, таких как скорость движения нити по поверхности, влажность, сила давления нити на поверхность. Известно, что распределение сил давления нити на поверхность при ее взаимодействии с цилиндром не является равномерным. Вблизи сечения 0 (ведомая ветвь) давление меньше, чем вблизи сечения 1 (ведущая ветвь). Представляет интерес вопрос о том, как сильно влияет на результат пренебрежение изменением коэффициента трения на участке контакта нити и цилиндра.

Учтем, что:

$$d\varphi = ds/r, \quad dN = q(s)b \, ds,$$

где r – радиус цилиндра, м; b – ширина

участка контакта, м; ds – длина элемента нити, м; $q(s)$ – давление нити на поверхность цилиндра, Па. Тогда система (2) примет вид:

$$\begin{cases} T \frac{ds}{r} = q(s)b \, ds, \\ dT = f(q)q(s)b \, ds. \end{cases} \quad (3)$$

Из первого уравнения системы (3) следует, что:

$$T = q(s)br. \quad (4)$$

Тогда

$$dT = q'(s)br \, ds.$$

Подставляя это во второе уравнение системы (3), получим

$$q'(s)br \, ds = f(q)q(s)b \, ds.$$

Разделив переменные, имеем

$$\int_{q(0)}^{q(s)} \frac{rdq}{qf(q)} = \int_0^s ds. \quad (5)$$

Из (4) находим:

$$q(0) = T_0 / br, \quad q(s) = T / br.$$

В работе [1] приведены экспериментальные данные о коэффициенте трения льняного волокна о металлическую поверхность, представленные в табл. 1.

Таблица 1

Давление, Па	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$	$8,4 \cdot 10^4$
Коэффициент трения	0,22	0,21	0,19	-	0,18

Получим функцию, описывающую изменение коэффициента трения в зависимости от давления. Аппроксимируя табличные значения полиномом второго порядка, методом наименьших квадратов получим:

$$f = 0,235 - 1,518 \cdot 10^{-6} q + 1,027 \cdot 10^{-11} q^2. \quad (6)$$

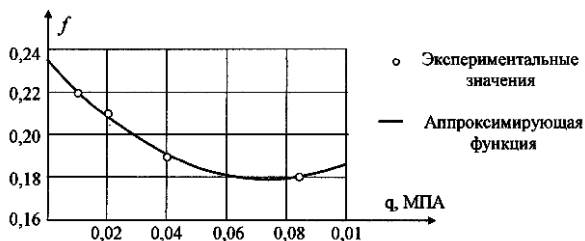


Рис. 2

$$\int_{T_0/br}^{T/br} \frac{rdq}{q(0,235 - 1,518 \cdot 10^{-6}q + 1,027 \cdot 10^{-11}q^2)} = \int_0^s ds. \quad (7)$$

Подынтегральная функция в левой части формулы (7) является рациональной дробью, и поэтому этот интеграл можно взять. В результате интегрирования получается громоздкая формула, из которой выразить T , как функцию T_0 , b , r и s , не удастся. Поэтому исследование формулы (7) проводилось в среде Mathcad численными методами.

Исследование проводилось при следующих значениях параметров: $r=0,001$ м; $b=0,01$ м.

Значение T_0 выбиралось из условия (4) так, чтобы давление нити на цилиндр не выходило за пределы, для которых достоверно известен коэффициент трения, то есть из условия:

$$0,01 \text{ МПа} \leq q \leq 0,084 \text{ МПа}.$$

При исследовании определялись четыре значения силы натяжения нити в сечении 1:

T – сила натяжения нити в сечении 1, рассчитанная по формуле (7);

T_1 – сила натяжения нити в сечении 1, рассчитанная по формуле (1), для коэффициента трения f , найденного по формуле (6) при $q = q(0) = T_0 / br$, то есть коэффициента трения в сечении 0;

T_2 – сила натяжения нити в сечении 1, рассчитанная по формуле (1), для коэффициента трения f , найденного по формуле (6) при $q = q(s) = T / br$, то есть коэффициента трения в сечении 1;

T_3 – сила натяжения нити в сечении 1, рассчитанная по формуле (1), для коэффициента трения $f = [f(q(0)) + f(q(s))]/2$, то

График аппроксимирующей функции и экспериментальные значения коэффициента трения представлены на рис.2.

Подставляя (6) в (5), получим:

есть среднего арифметического между значениями коэффициента трения в сечениях 0 и 1.

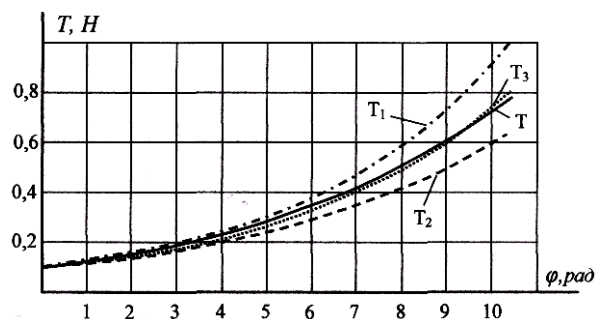


Рис. 3

Зависимость силы натяжения от угла обхвата представлена в виде графиков на рис. 3.

Анализ представленных графиков позволяет сделать выводы.

1. При небольших углах обхвата ($\varphi \leq \pi$) различие в силах натяжения, рассчитанных по формулам (1) и (7), невелико. Так, относительное отклонение, для $\varphi = \pi$, рассчитанное по формуле:

$\delta_i = |T_i - T| \cdot 100 / \max(T_i, T)$, составило при $T_0 = 0,1$ Н:

для $i=1$: $\delta_1 = 1,7$ %; для $i=2$: $\delta_2 = 2,0$ %;
для $i=3$: $\delta_3 = 0,14$ %;

при $T_0 = 0,2$ Н:

для $i=1$: $\delta_1 = 2,5$ %; для $i=2$: $\delta_2 = 2,6$ %;
для $i=3$: $\delta_3 = 0,07$ %;

при $T_0 = 0,4$ Н:

для $i=1$: $\delta_1 = 2,2$ %; для $i=2$: $\delta_2 = 1,5$ %;
для $i=3$: $\delta_3 = 0,36$ %.

2. При больших значениях угла обхвата ($\varphi > \pi$) различие в силах натяжения,

рассчитанных по формулам (1) и (7), может стать ощутимым.

Так, относительное отклонение для $\varphi = 2\pi$ составило при $T_0 = 0,1$ Н:

для $i = 1$: $\delta_1 = 7,6$ %; для $i = 2$: $\delta_2 = 9,2$ %;
для $i = 3$: $\delta_3 = 0,91$ %;

при $T_0 = 0,2$ Н:

для $i = 1$: $\delta_1 = 9,5$ %; для $i = 2$: $\delta_2 = 8,1$ %;
для $i = 3$: $\delta_3 = 0,7$ %.

Относительное отклонение для $\varphi = 3\pi$ составило при $T_0 = 0,1$ Н:

для $i=1$: $\delta_1=17,3$ %; для $i = 2$: $\delta_2 = 18,1$ %;
для $i = 3$: $\delta_3 = 0,4$ %.

3. Использовать формулу Эйлера с погрешностью, не превышающей 1% можно, если в качестве коэффициента трения выбрать среднее арифметическое коэффициентов трения в сечениях 0 и 1.

В заключение отметим, что сравнительно небольшие значения сил натяжения получились вследствие того, что исследовался случай с малым радиусом огибаемого цилиндра. При увеличении r или b , например в 10 раз, необходимо для создания давления в сечении 0, равного 10^4 Па, увеличить и силу натяжения в сечении 0 в 10 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крагельский И.В. Физические свойства лубяного сырья. – М.: Гизлегпром, 1939.

Рекомендована кафедрой теоретической механики и сопротивления материалов. Поступила 21.06.2006.