УДК 677.024

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОСНОВНЫХ И УТОЧНЫХ НИТЕЙ В ЗОНЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОДНОСЛОЙНОЙ ТКАНИ ПОЛОТНЯНОГО ПЕРЕПЛЕТЕНИЯ *

С Г СТЕПАНОВ

(Ивановская государственная текстильная академия)

В [1…3] получены математические модели равновесия основной и уточных нитей в зоне формирования однослойной ткани полотняного переплетения при крайнем переднем положении берда.

Математические модели связаны между собой через интегральные соотношения (18) [2], вытекающие из условий равенства усилий в зонах контакта уточных нитей с основной нитью, через геометрические соотношения (19) [2], (11) [3] – равенства сумм высот волн изгиба нитей основы и утка сумме их диаметров с учетом вертикального смятия, а также через равенства (2), (3) [3], связывающие усилия, действующие на прибиваемую уточину с системой сил, передаваемых на нее со стороны основной нити.

Сложный процесс взаимодействия основных и уточных нитей в зоне формирования ткани (ЗФТ) в момент прибоя может быть исследован лишь на основе объединения этих взаимосвязанных математических моделей

Объединяя полученные в [1…3] математические модели в одну и учитывая связывающие их соотношения и равенства, имеем:

$$\frac{dN}{ds} - Q\frac{d\varphi}{ds} - T(s)(\cos\varphi - \mu\sin\varphi) - \mu G(s) = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{dQ}{ds} + N\frac{d\varphi}{ds} - F(s) + T(s)\sin\varphi = 0, \qquad (2)$$

$$A_0\frac{d^2\varphi}{ds^2} + Q + 0{,}5\, d_0\eta_{OB}\left[T(s)(\cos\varphi - \mu\sin\varphi) - \mu W(s)\right] = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi \qquad (4)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \qquad (5)$$

$$\frac{dN_i^y}{d\ell_i} - Q_i^y\frac{d\varphi_i}{d\ell_i} = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{dQ^y}{d\ell_i} + N_i^y\frac{d\varphi}{d\ell_i} \quad T_i(\ell_i) = 0, \qquad (7)$$

$$A_y\frac{d^2\varphi_i}{d\ell_i^2} + Q_i^y = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{dV_i}{d\ell_i} = \sin\varphi_i, \qquad (9)$$

$$\frac{dZ_i}{d\ell_i} = \cos\varphi_i, \quad i = 2, 3, \ldots, n+1, \qquad (10)$$

$$\int_{S_{к+1}}^{S_к} q_i^o\cos\varphi\, ds = \int_{\ell_i^{II}}^{\ell_i^{III}} q_i^y\cos\varphi\; d\ell_i, \quad i = 2, 3, \ldots, n+1 \qquad (11)$$

$$h_i^o + h_i^y = d_o\eta_{ов} + d_y\eta_{ув}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n+1, \qquad (12)$$

$$P = p(s_0 - s_2) - \mu\int_{s_2}^{s_0} p\sin\varphi\cos\varphi\, ds \quad \int_{s_2}^{s_1} q_1^0\sin\varphi\, ds + \mu\int_{s_2}^{s_1} q_1^0\cos\varphi\, ds, \qquad (13)$$

$$F = \int_{s_2}^{s_0} q_0\cos\varphi\, ds + \mu\int_{s_2}^{s_1} q_1^0\sin\varphi\, ds - \mu\int_{s_2}^{s_0} p\sin^2\varphi\, ds \qquad (14)$$

---

* Научный консультант – проф., докт техн наук Г И Чистобородов

$$\frac{dQ_{X_1}}{d\varepsilon}=0, \tag{15}$$

$$\frac{dQ_{X_2}}{d\varepsilon}+F\delta(\varepsilon-\varepsilon_1)-F\delta(\varepsilon-\varepsilon_2)=0, \tag{16}$$

$$\frac{dQ_{X_3}}{d\varepsilon}+P\delta(\varepsilon-\varepsilon_1)+P\delta(\varepsilon-\varepsilon_2)=0, \tag{17}$$

$$\frac{dM_{X_1}}{d\varepsilon}+\frac{dx_2}{d\varepsilon}Q_{X_3}-\frac{dx_3}{d\varepsilon}Q_{X_2}+M^{I}_{X_1}\delta(\varepsilon-\varepsilon_1)-M^{II}_{X_1}\delta(\varepsilon-\varepsilon_2)=0, \tag{18}$$

$$\frac{dM_{X_2}}{d\varepsilon}+\frac{dx_3}{d\varepsilon}Q_{X_1}-\frac{dx_1}{d\varepsilon}Q_{X_3}=0, \tag{19}$$

$$\frac{dM_{X_3}}{d\varepsilon}+\frac{dx_1}{d\varepsilon}Q_{X_2}-\frac{dx_2}{d\varepsilon}Q_{X_1}=0, \tag{20}$$

$$\frac{dx_1}{d\varepsilon}=\cos\psi_1\cos\varphi_1, \tag{21}$$

$$\frac{dx_2}{d\varepsilon}=\cos\psi_1\sin\varphi_1\cos\vartheta_1+\sin\psi_1\sin\vartheta_1, \tag{22}$$

$$\frac{dx_3}{d\varepsilon}=\cos\psi_1\sin\varphi_1\sin\vartheta_1-\sin\psi_1\cos\vartheta_1, \tag{23}$$

$$M_{X_1}=A_{11}\chi_1\cos\psi_1\cos\varphi_1-A_{22}\chi_2\sin\varphi_1+A_{33}\chi_3\sin\psi_1\cos\varphi_1, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}M_{X_2}&=A_{11}\chi_1(\cos\psi_1\sin\varphi_1\cos\vartheta_1+\sin\psi_1\sin\vartheta_1)+A_{22}\chi_2\cos\varphi_1\cos\vartheta_1+\\&+A_{33}\chi_3\sin\psi_1\sin\varphi_1\cos\vartheta_1-\cos\psi_1\sin\vartheta_1),\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}M_{X_3}&=A_{11}\chi_1(\cos\psi_1\sin\varphi_1\sin\vartheta_1-\sin\psi_1\cos\vartheta_1)+A_{22}\chi_2\cos\varphi_1\sin\vartheta_1+\\&+A_{33}\chi_3(\sin\psi_1\sin\varphi_1\sin\vartheta_1+\cos\psi_1\cos\vartheta_1),\end{aligned} \tag{26}$$

$$\chi_1=\frac{d\vartheta_1}{d\varepsilon}\cos\psi_1\cos\varphi_1-\frac{d\varphi_1}{d\varepsilon}\sin\psi_1, \tag{27}$$

$$\chi_2=\frac{d\psi_1}{d\varepsilon}-\frac{d\vartheta_1}{d\varepsilon}\sin\varphi_1, \tag{28}$$

$$\chi_3=\frac{d\varphi_1}{d\varepsilon}\cos\psi_1+\frac{d\vartheta_1}{d\varepsilon}\sin\psi_1\cos\varphi_1, \tag{29}$$

где $F(s)=-\sum_{i=1}^{n}q_i^0\left[H(s-s_{2i})-H(s-s_{2i-1})\right](-1)^i+q_{n+1}^0\left[1-H(s-s_{2n+1})\right](-1)^n$;

$$T(s)=p\left[H(s-s_2)-H(s-s_1)\right]; \qquad G(s)=\sum_{i=1}^{n}q_i^0\left[H(s-s_{2i})-H(s-s_{2i-1})\right];$$

$$W(s)=\sum_{i=1}^{n}q_i^0\left[H(s-s_{2i})-H(s-s_{2i-1})\right](-1)^i;$$

$$T_i(\ell_i)=q_i^y\left[1-H(\ell_i-\ell_i^{I})-H(\ell_i-\ell_i^{II})+H(\ell_i-\ell_i^{III})+H(\ell_i-\ell_i^{IV})\right];$$

$H(s-s_0),\ldots,$ $H(s-s_{i+2}),\ H(\ell_i-\ell_i^{I}),\ \ldots,H(\ell_i-\ell_i^{IV})-$

функции Хевисайда, задающие действие распределенных нагрузок q_i^0, p, q_i^y на основу и уточины; s_0, s_1, s_2,…, s_{i+2}, $\ell_i^I,\ldots,\ \ell_i^{IV}$ – координаты, определяющие действие распределенных нагрузок на основную и уточные нити; $\delta(\varepsilon-\varepsilon_j)$, $\delta(\varepsilon-\varepsilon_k)$ – дельта – функции Дирака, задающие действие сосредоточенных сил и моментов на прибиваемую уточную нить; ε_1, ε_2 – координаты точек приложения сосредоточенных сил и моментов на прибиваемой уточине; N, Q, N_i^y, Q_i^y – текущие значения продольной и поперечной сил в сечениях основной нити и в i-й уточине; s, ℓ_i, ε – текущие координаты основной нити, уточных нитей и прибиваемой уточины; φ, φ_i – текущие значения углов поворота поперечных сечений в основной нити и в i-й уточине; h_i^o, h_i^y – высоты волн изгиба отрезков основной и уточных нитей в ЗФТ; d_o, d_y, $\eta_{ов}$, $\eta_{ув}$ – диаметры основной и уточной нитей и коэффициенты их вертикального смятия; $Q_{X_1}, Q_{X_2}, Q_{X_3}$ – проекции на координатные оси вектора внутренних усилий в сечениях прибиваемой уточины; $M_{X_1}, M_{X_2}, M_{X_3}$ – проекции на координатные оси вектора внутренних моментов в сечениях прибиваемой уточиной нити; X_1, X_2, X_3 – координаты точек осевой линии прибиваемой уточины; $\psi_1, \varphi_1, \vartheta_1$ – углы, характеризующие положение оси нити в пространстве; χ_1, χ_2, χ_3 – кручение и кривизна осевой линии нити; A_{11}, A_{22}, A_{33} – жесткости при кручении и изгибе; F, P – силы, действующие со стороны основы на прибиваемую уточину; $M_{X_1}^{I}, M_{X_2}^{II}$ – действующие на прибиваемую уточину крутящие моменты, обусловленные силами трения между нитями в зоне их контакта.

Полученная нелинейная математическая модель взаимодействия основных и уточных нитей в зоне формирования однослойной ткани полотняного переплетения представляет собой систему 7n+17 уравнений при таком же числе неизвестных. Таким образом, число уравнений равновесия и количество неизвестных зависит от числа n уточин в ЗФТ, которое также подлежит определению.

Аналитическое решение представленной нелинейной системы уравнений в общем виде практически невозможно. Также затруднено, из-за структуры уравнений, ее численное решение методами прямого интегрирования. Численное решение этой системы может быть выполнено методом конечных разностей, который был опробован нами и дал хорошие результаты при решении менее сложной, но сходной по структуре системы уравнений равновесия нитей в элементе ткани вне зоны ее формирования [4]. Однако не будем ставить своей целью решение системы в общем виде, а упростим ее.

Анализ деформирования уточной нити в элементе ткани в зоне ее формирования показывает, что перемещения точек осевой линии нити (имеются в виду перемещения оси нити, связанные с ее деформациями от действующих нагрузок) в основном обусловлены ее растяжением под действием усилий от основной нити, а также и от зубьев берда, если речь идет о прибиваемой уточине. Однако, эти деформации невелики для большинства текстильных нитей. Например, согласно [5] для хлопчатобумажной нити 25 текс деформация при разрыве $\varepsilon'_{разр} = 6{,}5\ \%$, а в рабочих условиях деформация в 2-3 раза ниже $\varepsilon'_{разр}$. Таким деформациям будут соответствовать малые прогибы нити в элементе ткани. Это относится, как мы считаем, к большинству тканей, вырабатываемых, в том числе, и на челночных станках, на которых нить прокладывается с некоторым небольшим запасом по длине. В этом случае перемещения точек оси нити в элементе ткани будут несколько больше за счет ее изгиба без удлинения при выборке запаса по длине.

На основании этого считаем малыми величинами высоты волн, прогибы, углы, характеризующие положение осевой линии нити для всех уточин в ЗФТ. В этом случае уравнения равновесия для i-уточной нити (6)…(10) сводятся к одному уравнению

$$-A_y \frac{d^4 V_i}{dZ_i^4} + N_{i0}^y \frac{d^2 V_i}{dZ_i^2} = T_i(Z_i), \quad (30)$$

где N_{i0}^y – начальное натяжение нити;

$$T_i(Z_i) = q_i^y \left[1 - H(Z_i - Z_i^{I}) - H(Z_i - Z_i^{II}) + H(Z_i - Z_i^{III}) + H(Z_i - Z_i^{IV})\right].$$

Если от распределенной нагрузки q_i^y, действующей на уточину в элементе ткани, перейти к равнодействующей сосредоточенной силе F_i^y (i=2,3,…, n+1), получим

$$T_i(Z_i) = -F_i^y \delta(Z_i - L_o), \quad (31)$$

где $\delta(Z_i - L_o)$ – дельта-функция Дирака [6]; L_o – геометрическая плотность ткани по основе.

Итак, вместо пяти уравнений (6)…(10) для i-й уточины получаем одно уравнение (30). Подобным образом может быть упрощена система уравнений (15)…(29) для прибиваемой уточины.

ВЫВОДЫ

Получена математическая модель взаимодействия основных и уточных нитей в зоне формирования однослойной ткани полотняного переплетения (1)…(29) и определены пути ее упрощения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов С.Г.* Математическая модель равновесия основной нити в зоне формирования однослойной ткани полотняного переплетения // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, № 1.

2. *Степанов С.Г.* Математическая модель равновесия уточных нитей в зоне формирования однослойной ткани полотняного переплетения // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, № 2.

3. *Степанов С.Г.* Математическая модель равновесия прибиваемой уточной нити // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, № 3.

4. *Степанов Г.В., Степанов С.Г.* Теория строения ткани. – Иваново: ИГТА, 2004.

5. *Кукин Г.Н., Соловьев А.Н.* Текстильное материаловедение. – Ч. II. М., 1964.

6. *Зельдович Я.Б., Мышкин А.Д.* Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1972.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения ИГТА. Поступила 21.06.2006.