УДК 677.08:53

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В ЕМКОСТИ С ТЕКСТИЛЬНЫМИ ОТХОДАМИ ПРИ ПОЛУЧЕНИИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВОЛОКОН

А.П. БАШКОВ, В.Д. ФРОЛОВ

(Ивановская государственная текстильная академия)

При разволокнении текстильных отходов, особенно отходов из шерсти и других длинных волокон, во избежание их повреждения необходимо поэтапно ослаблять структурные связи в текстильном продукте, постепенно увеличивая интенсивность обработки.

Связь между волокнами в текстильной структуре – пряже или ткани, определяется их сцепляемостью, то есть поверхностными силами трения, упругостью и извитостью. Уменьшить значения этих характеристик можно, подвергнув волокно тепловлажностной обработке, например, водяным паром, при этом происходит модификация основных свойств волокна. Волокна становятся мягче, распрямляются, чешуйки на поверхности шерстяного волокна прилегают к его телу, и оно становится менее шероховатым. Для еще большего уменьшения коэффициента поверхностного трения в паровую среду можно добавить эмульгатор.

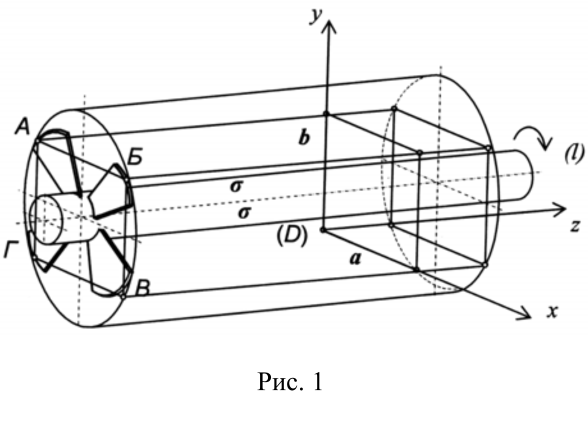

Рис. 1

В процессе разработки новой технологии для получения модифицированных волокон из жестких отходов в виде пряжи и лоскута в качестве основного рабочего органа было предложено использовать лопастной винт с полым валом, через который с помощью специальных форсунок к обрабатываемому волокну подается пар (рис. 1 – схема пространства, в котором распределяется тепло).

Распределение температуры при проникновении пара в волокнистую среду, заключенную во внутренней области бесконечного однородного цилиндра, условно ограниченную объемом однородной призмы прямоугольного сечения, представляющей пространство вала с расположенными на нем в ряд четырехлопастными винтами, можно определить следующим образом.

Рассмотрим одно сечение рабочей камеры, приведенное к крайним точкам лопастей А, Б, В, Г.

Пусть вдоль линии (ℓ), проходящей внутри призмы параллельно ее ребрам, равномерно распределены источники тепла (форсунки полого вала) с плотностью Q. Температура внешнего пространства принимается равной нулю с постоянным внешним коэффициентом теплопроводности.

Выбираем оси координат и направляем ось z по одному из ребер призмы, а оси x и y – по ее граням, где размеры поперечного сечения будут a и b, координаты линии (ℓ) будут x_0 и y_0.

Будем считать, что источники тепла распределены в бесконечной призме поперечного сечения σ на трубе с малым диаметром d вдоль линии (ℓ) в области (D).

Плотность распределения источников тепла в рассматриваемой призме принимаем $q(x,y)$, тогда $q(x,y) = 0$ вне области (σ), и $\iint\limits_{(\sigma)} q(x,y)dxdy = Q$ внутри этой области.

Очевидно, что температура призмы u одинаково распределена в любом сечении призмы, то есть u не зависит от z. В этом случае задача становится двумерной.

Известно, что в какой-либо среде тепло переходит от более разогретой области к менее теплой, тогда количество тепла, отнесенное к единице времени, проходящее через некоторую площадку в выбранную от площадки сторону, равно потоку через эту площадку в указанную сторону вектора Q = –k grad u, где k = k(r) – некоторая положительная величина, зависящая от вещества и являющаяся внутренней теплопроводностью.

Тогда температура в рассматриваемой призме удовлетворяет уравнению:

$$\Delta u = -\frac{q}{k} \qquad (1)$$

и краевым условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\gamma u = 0, \qquad (2)$$

где $\gamma = \frac{h}{k}$, h > 0 – коэффициент внешней теплопроводности.

Рассматривая задачу о собственных значениях для оператора Лапласа L(u)=Δu, веса ρ = 1 и ряда двумерных областей (D) для прямоугольника со сторонами a и b, когда уравнения его сторон будут x = 0, x = a, y = 0, y = b.

При этом краевые условия можно выразить как

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial y} + \delta u\right|_{y=D} = 0, \qquad (3)$$

где α, β, γ и δ – неотрицательные постоянные.

Тогда краевые условия можно записать в форме

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \sigma u = 0, \qquad (4)$$

где σ – функция, определяемая условиями:

$$\sigma = \begin{cases} \alpha, & x = 0, \\ \beta, & x = a, \\ \gamma, & y = 0, \\ \delta, & y = b. \end{cases} \qquad (5)$$

Уравнение задачи имеет вид:

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0. \qquad (6)$$

Применяя метод разделения переменных, ищем решение в виде

$$u(x,y) = v(x)w(y). \qquad (7)$$

Из уравнения (3) получаем краевые условия для функций v и w:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}-\alpha v\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}+\beta v\right|_{x=a}=0, \qquad (8)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}+\gamma w\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial w}{\partial y}+\delta w\right|_{y=b}=0. \qquad (9)$$

Подставив в уравнение (6) u = vw и разделив переменные, получим

$$\frac{v''}{v}+\frac{w''}{w}=-\lambda, \qquad (10)$$

где каждое слагаемое постоянно (обозначим их через μ и υ).

Таким образом, получается задача о собственных значениях v и w, выраженная уравнениями:

$$\begin{cases} v''+\mu v=0, \\ w''+\upsilon w=0 \end{cases} \qquad (11)$$

с краевыми условиями (8) и (9).

При этом

$$\lambda=\mu+\upsilon. \qquad (12)$$

Тогда согласно уравнению

$$\Delta v+\lambda v=0$$

и краевым условиям (2) собственными значениями v и w будут числа

$$\lambda_{m,n}=\mu_m+\upsilon_n,$$

где μ_m и υ_n – корни уравнений:

$$\frac{\mu_m-\gamma^2}{2\gamma\sqrt{\mu_m}}=\operatorname{ctg} a\sqrt{\mu_m}; \qquad \frac{\upsilon_n-\gamma^2}{2\gamma\sqrt{\upsilon_n}}=\operatorname{ctg} b\sqrt{\upsilon_n}. \qquad (13)$$

Собственные функции имеют вид

$$v_{m,n}=\sin\left(x\sqrt{\mu_m}+\varphi_m\right)\sin\left(y\sqrt{\upsilon_n}+\psi_n\right),$$

$$\varphi_m=\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\mu_m}, \qquad \psi_n=\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\upsilon_n}, \qquad (14)$$

$$N_{m,n}=\frac{1}{2}\sqrt{\left[a+\frac{2\gamma}{\gamma^2+\mu_m}\right]\left[b+\frac{2\gamma}{\gamma^2+\upsilon_n}\right]}.$$

Тогда коэффициенты Фурье $C_{m,n}$ функции q по системе $v_{m,n}$ будут:

$$C_{m,n}=\frac{4}{\left[a+\frac{2\gamma}{\gamma^2+\mu_m}\right]\left[b+\frac{2\gamma}{\gamma^2+\upsilon_n}\right]}\iint\limits_{(D)} q(x,y)\sin\left(x\sqrt{\mu_m}+\varphi_m\right)\sin\left(y\sqrt{\upsilon_n}+\psi_n\right)dxdy=$$

$$=\frac{4}{\left[a+\frac{2\gamma}{\gamma^2+\mu_m}\right]\left[b+\frac{2\gamma}{\gamma^2+\upsilon_n}\right]}\iint\limits_{\sigma} q(x,y)\sin\left(x\sqrt{\mu_m}+\varphi_m\right)\sin\left(y\sqrt{\upsilon_n}+\psi_n\right)dxdy=$$

$$=\frac{4Q}{\left[a+\frac{2\gamma}{\gamma^2+\mu_m}\right]\left[b+\frac{2\gamma}{\gamma^2+\upsilon_n}\right]}\sin\left(\xi\sqrt{\mu_m}+\varphi_m\right)\sin\left(\eta\sqrt{\upsilon_n}+\psi_n\right), \qquad (15)$$

где (ξ, η) – точка, лежащая в области (σ).

Ввиду малого значения (σ) можно считать

$$C_{m,n}=\frac{4Q}{\left[a+\frac{2\gamma}{\gamma^2+\mu_m}\right]\left[b+\frac{2\gamma}{\gamma^2+\upsilon_n}\right]}\sin\left(x_0\sqrt{\mu_m}+\varphi_m\right)\sin\left(y_0\sqrt{\upsilon_n}+\psi_n\right). \qquad (16)$$

Дальнейшие рассуждения продолжим, решая задачу в виде ряда по функции $v_{m,n}$:

$$u(x,y)=\sum_{m,\ n=1}^{\infty} w_{m,n}\sin\left(x\sqrt{\mu_m}+\varphi_m\right)\sin\left(y\sqrt{\upsilon_n}+\psi_n\right), \tag{17}$$

где $w_{m,n}$ – коэффициенты Фурье u(x, y):

$$w_{m,n}=\frac{4}{\left[a+\dfrac{2\gamma}{\gamma^2+\mu_m}\right]\left[b+\dfrac{2\gamma}{\gamma^2+\upsilon_n}\right]}\iint\limits_{(D)} u(x,y)\sin\left(x\sqrt{\mu_m}+\varphi_m\right)\sin\left(y\sqrt{\upsilon_n}+\psi_n\right)dxdy. \tag{18}$$

Для определения коэффициента $w_{m,n}$ умножим (1) на $\dfrac{1}{N_{m,n}^2}v_{m,n}$ и проинтегрируем по прямоугольнику (D):

$$\frac{1}{N_{m,n}^2}\iint\limits_{(D)}\Delta u v_{m,n}dxdy=-\frac{1}{kN_{m,n}^2}\iint\limits_{(D)} quv_{m,n}dxdy=-\frac{1}{k}C_{m,n}. \tag{19}$$

Интеграл в левой части этого выражения преобразуется по вспомогательной формуле из теории поля в связи с тем, что u и v две произвольные функции, обладающие непрерывными частными производными до второго порядка включительно, тогда

$$\iiint\limits_{V}\left\{u(P)\Delta_P v-v(P)\Delta_P u\right\}dV_P=\oint\!\!\oint\limits_{S}\left\{u(P)\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_P-v(P)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_P\right\}dS_P. \tag{20}$$

Отсюда с учетом краевых условий (2) имеем

$$\frac{1}{N_{m,n}^2}\iint\limits_{(D)}\Delta u v_{m,n}dxdy=\frac{1}{N_{m,n}^2}\iint\limits_{(D)}u\Delta v_{m,n}dxdy=\frac{\lambda_{m,n}}{N_{m,n}^2}\iint\limits_{(D)}uv_{m,n}dxdy=-\lambda_{m,n}w_{m,n}. \tag{21}$$

Следовательно, $\lambda_{m,n}w_{m,n}=-\dfrac{1}{k}C_{m,n}$ и

$$w_{m,n}=\frac{4Q}{k\left(\mu_m+\upsilon_n\right)\left[a+\dfrac{2\gamma}{\gamma^2+\mu_m}\right]\left[b+\dfrac{2\gamma}{\gamma^2+\upsilon_n}\right]}\sin\left(x_0\sqrt{\mu_m}+\varphi_m\right)\sin\left(y_0\sqrt{\upsilon_n}+\psi_n\right). \tag{22}$$

Тогда решение задачи запишется в виде

$$u = \frac{4Q}{k} \sum_{m,\ n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(x_0\sqrt{\mu_m} + \varphi_m\right)\sin\left(y_0\sqrt{\upsilon_n} + \psi_n\right)\sin\left(x\sqrt{\mu_m} + \varphi_m\right)\sin\left(y\sqrt{\upsilon_n} + \psi_n\right)}{\left(\mu_m + \upsilon_n\right)\left[a + \dfrac{2\gamma}{\gamma^2 + \mu_m}\right]\left[b + \dfrac{2\gamma}{\gamma^2 + \upsilon_n}\right]}. \qquad (23)$$

Таким образом, распределение температуры и тепла в массе однородных волокнистых отходов зависит от коэффициента внутренней теплопроводности как наиболее эффективного фактора технологии щадящей деформации разволокняемого материала и плотности распределения источников тепла.

Рекомендована кафедрой безопасности жизнедеятельности. Поступила 25.05.06.