

УДК 677.071.252.4:620.177

**ТЕОРИЯ, МЕТОДИКА, РЕЗУЛЬТАТЫ  
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ НИТИ ПРИ ИЗГИБЕ**

*В.П. ЩЕРБАКОВ, И.Б. ЦЫГАНОВ, О.Ю. ДМИТРИЕВ, Т.И. ПОЛЯКОВА*

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

В книге Дж. Ф. Белла [1], представляющей собой капитальный исторический обзор экспериментальных основ механики деформируемых твердых тел, большое внимание уделено испытательной технике, в частности, испытательным машинам. Со всей определенностью автор высказывается в пользу так называемых машин с мягким нагружением, то есть с нагружением мертвым грузом. Этому же мнению придерживаются и многие другие экспериментаторы, даже те, кто вследствие необходимости вынужден пользоваться машинами с жестким нагружением.

В настоящей работе рассмотрена геометрически нелинейная теория изгиба упругой нити при больших перемещениях в условиях ее нагружения мертвым грузом, дана методика определения жесткости нити при изгибе, приведены результаты эксперимента для эталонных нитей, показана адекватность отображения результатов этого эксперимента в математическом аппарате.

Расчетные уравнения упругой нити включают введенное Клебшем соотношение, основанное на пропорциональности кривизны нити  $\kappa = \frac{1}{\rho}$  изгибающему моменту  $M$  внутренних усилий:

$$M = H\kappa, \quad (1)$$

где  $H$  – жесткость нити при изгибе.

Точное значение кривизны определяется формулой

$$\kappa = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

в то время как в линейной теории изгиба упругих нитей ввиду малости угловых перемещений упругой линии принимается

$$\kappa \approx \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Точное выражение кривизны помимо написанного выражения можно написать в виде

$$\kappa = \frac{d\vartheta}{ds}, \quad (2)$$

где  $s$  – длина дуги упругой линии, отсчитанная от некоторой точки, принятой за начало;  $\vartheta$  – угол наклона касательной в текущей точке упругой линии.

Тогда уравнение равновесия упругой линии при больших перемещениях записывается в форме

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{M}{H}. \quad (3)$$

При изучении жесткости текстильных материалов чаще всего встречается задача в следующей постановке: нить длиной  $\ell$  сплошного круглого сечения диаметра  $d$ , защемленная одним концом, изгибается силой  $P$  на другом конце. Решение задачи

поперечного изгиба для максимального прогиба дает  $u = \frac{P\ell^3}{3H}$ . Отсюда по известным из опыта величинам  $u$ ,  $P$ ,  $\ell$  вычисляется жесткость  $H$ .

Сразу же возникает вопрос правомерности использования этой формулы для нахождения перемещений точек упругой нити, так как приведенная формула получена для малых перемещений и углов поворота, когда те и другие являются величинами примерно одного порядка.

Для текстильных нитей, которые обладают жесткостью, значительно меньшей по сравнению с жесткостью элементов конструкций, взаимные перемещения частей нити не малы. Это обстоятельство приводит к необходимости специального исследования. Идея вывода уравнений упругой линии в больших перемещениях основана на известной книге Е. П. Попова [2].

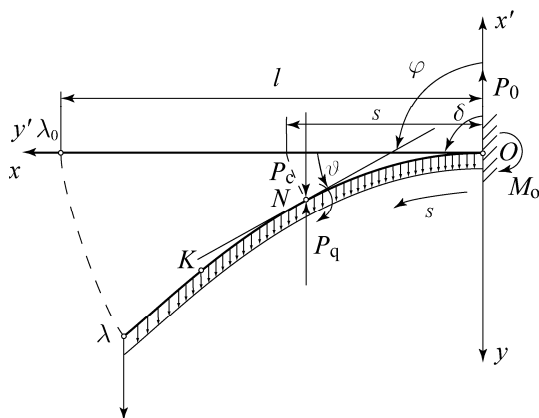


Рис. 1

На рис. 1 (к выводу точного уравнения равновесия упругой линии) показана упругая линия, полученная при изгибе закрепленной консольно нити.

На свободном конце приложена сосредоточенная сила  $P$ , перемещающаяся при изгибе поступательно, сохраняя перпендикулярность к первоначальной прямоугольной оси. По всей длине дуги  $s$  упругой линии приложена распределенная силовая нагрузка  $q(s)$ , обусловленная весом нити.

Введем систему координат  $xy$ , ориентированную по касательной и нормали к упругой линии в заделке, и систему  $x'y'$ , ориентированную по направлению силы,

приложенной в начальной точке  $O$ . Для составления внутренних изгибающих моментов  $M(s)$  разрежем упругую линию нити в произвольной точке  $N(x,y)$  и рассмотрим равновесие  $N1$  части упругой линии.

Направление силы, приложенной в начальной точке  $O$  рассматриваемого участка нити, будем считать основным направлением.

Тогда введем угол  $\delta$ , отсчитываемый против часовой стрелки от направления силы  $P$  в точке  $O$  к оси  $x$  (в нашем случае  $\delta = 90^\circ$ ).

На рис. 1 показаны углы  $\vartheta$  и  $\varphi$  в произвольной точке  $N$ . Угол  $\varphi$  выражается через текущий угол  $\vartheta$  соотношением  $\varphi = \vartheta + \delta$  и представляет собой угол наклона касательной упругой линии к оси  $x'$ . При этом кривизна, определяемая формулой (2), равна  $\kappa = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}$ . Вектор силы  $P_q$  уравновешивает распределенную нагрузку  $q(s)$  на участке  $N1$ :

$$P_q = -\int_s^\ell q ds.$$

Внутренний изгибающий момент в сечении  $N(x,y)$  равен

$$M = M_p + M_q + M_1. \quad (4)$$

Момент от сосредоточенной силы  $P_c$  будет

$$M_p = P_c(y'_1 - y'). \quad (5)$$

Для определения момента  $M_q$  от распределенной силовой нагрузки возьмем элементарную силу  $q ds$  в произвольной точке  $K(x,y)$  и получим

$$M_q = -\int_s^\ell (y' - y'_N) q ds. \quad (6)$$

В данном случае координата  $y'_N$  выполняет роль постоянной, поэтому индекс можно отбросить и написать:

$$M_q = -\int_s^\ell y' q ds + y' \int_s^\ell q ds. \quad (7)$$

Продифференцируем (4) по дуге  $s$ , принимая во внимание (6) и (7):

$$\frac{dM}{ds} = -P_c \frac{dy'}{ds} + y' q + \frac{dy'}{ds} \int_s^\ell q ds - y' q. \quad (8)$$

Здесь учтено, что если верхний предел определенного интеграла есть величина переменная, то производная интеграла по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции при этом верхнем пределе, то есть  $\frac{d}{ds} \int_s^\ell y' q ds = y' q$ .

Воспользуемся известным равенством  $\frac{dy'}{ds} = \sin \varphi$ , а также ранее приведенным соотношением  $P_q = -\int_s^\ell q ds$  и получим

$$\frac{dM}{ds} = -P_c \sin \varphi - P_q \sin \varphi. \quad (9)$$

Продифференцируем уравнение равновесия (3) по  $s$ , подставим в полученное выражение последнее равенство (9) и в результате получим

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{P_c}{H} \sin \varphi + \frac{P_q}{H} \sin \varphi = 0. \quad (10)$$

Обозначим

$$\frac{P_c}{H} = \frac{\omega_c^2}{\ell^2} \text{ и } \frac{P_q}{H} = \frac{\omega_q^2}{\ell^2}.$$

Тогда точное уравнение равновесия упругой линии в общем случае записывается в безразмерном виде:

$$\ell^2 \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = -\omega_c^2 \sin^2 \varphi - \omega_q^2 \sin^2 \varphi. \quad (11)$$

Рассмотрим изгиб упругой нити при больших перемещениях под действием распределенной силы  $q$  и сосредоточенной силы  $P$ . Здесь будем пользоваться уравнением упругой линии в безразмерной форме:

$$\frac{d^2 \vartheta}{ds^2} = -\frac{P \ell^2}{H} \sin \left( \vartheta + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{q \ell^3 s}{H} \left( \vartheta + \frac{\pi}{2} \right), \quad (12)$$

где  $s = \frac{s^*}{\ell}$ ;  $s^*$  – текущая длина дуги упругой линии;  $\ell$  – длина нити.

Сосредоточенная сила  $P$  и ее угол наклона  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , отсчитываемый от линии действия силы  $P$  к оси  $x$  против часовой стрелки (рис.1), не зависит от  $s$  и  $\vartheta$ . Равнодействующая сила  $P_q$  от распределенной нагрузки  $q$  явно зависит от длины  $s$ .

Решение дифференциального уравнения (12) будем искать в виде  $\vartheta = \vartheta(s)$ . Координаты концевой точки 1 определяются формулами

$$x_1 = \ell \int_0^1 \cos \vartheta(s) ds, \quad y_1 = \ell \int_0^1 \sin \vartheta(s) ds. \quad (13)$$

Даны два краевых условия: 1) в точке  $O$   $\vartheta_0 = 0$  при  $s = 0$  и 2) в точке 1 – кривизна  $\left( \frac{d\vartheta}{ds} \right)_1 = 0$  при  $s = 1$ .

Для решения задачи изгиба нитей была составлена программа для системы Matlab/Simulink©. Программа решения дифференциального уравнения (12) в виде структурной схемы составлена по общему методу программирования. В этой программе помимо основных выходных функций  $\vartheta(s)$  и  $\frac{d\vartheta(s)}{ds}$  рассчитываются координаты концов изгибаемых нитей  $x_1$  и  $y_1$  в соответствии с выражениями (13).

Особенностью данной задачи является наличие краевых условий. Отсюда возникает необходимость многократного повторения решения при задании начального

условия  $\frac{d\vartheta(0)}{ds}$  такого, чтобы по окончании решения выполнялось граничное условие, то есть чтобы при  $s = 1$  производная выходной переменной  $\frac{d\vartheta(s)}{ds}$  равнялась нулю.

В связи с тем, что целью нашего исследования было определение жесткости нити при изгибе  $H$ , входящего в дифференциальное уравнение (12) в качестве параметра, каждый цикл многократного подбора начального условия  $\frac{d\vartheta(0)}{ds}$  повторялся после задания очередного значения параметра  $H$ . Другими словами, осуществлялся подбор такого значения параметра  $H$ , которое обеспечило бы в результате многократного повторения решения с изменяемым начальным условием  $\frac{d\vartheta(0)}{ds}$  получение известного из эксперимента прогиба нити  $y_1$ .

Использование системы Simulink при решении поставленной нами задачи значительно упрощает и делает более надежным решение этой задачи, так как задание изменяемых в ходе ее решения параметра  $H$  и начального условия  $\frac{d\vartheta(0)}{ds}$  осуществляется перенастройкой соответствующих блоков в структурной схеме на экране компьютера.

Определение жесткости реальной нити заключается:

- 1) в подготовке образца нитей с пластиной на конце,
- 2) в измерении прогиба нитей по рассмотренной модели,
- 3) в решении системы уравнений.

При подготовке образца на мотовиле наматывается от 50 до 100 витков испытываемой нити. На полученную полоску нитей неусаживающимся клеем наклеивается рамка из плотного материала. После высыхания клея полоска нитей обрезаются так, чтобы концы нитей не выступали за контур рамки. Непосредственно перед испытанием боковые стороны рамки, не скрепленные с нитями, обрезаются. Затем

от одной из полосок с наклеенными нитями отрезается полоска такой ширины, чтобы полученный образец, удерживаемый горизонтально за широкую полоску, имел прогиб свободного конца более  $1/3$  от длины консоли.

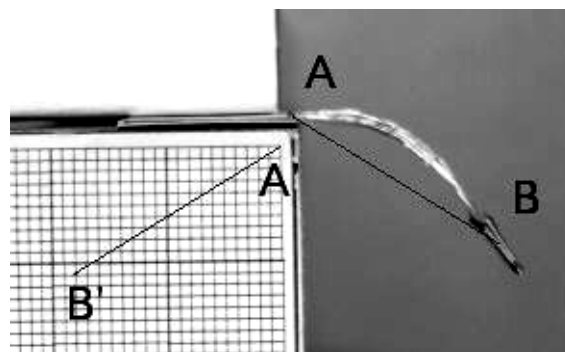


Рис. 2

Образец зажимается за широкую полоску в горизонтальном зажиме и фотографируется с помощью цифровой фотокамеры. Для устранения влияния собственного изгиба нитей производится повторное фотографирование образца после его переворота верхней стороной вниз. После этого от образца отрезается зажимная полоска и оставшаяся часть образца взвешивается на торсионных весах. Полученные фотографии обрабатываются на компьютере с помощью графического редактора (рис. 2 – фотография изгиба нитей при больших перемещениях).

Для оценки меры достоверности теории и методики измерения выбраны вполне упругие материалы, жесткость которых известна с достаточной точностью и надежностью. Испытывались образцы металлических моноплетей, перерабатываемых на основовязальных машинах трикотажного производства: вольфрамовая нить диаметром 15 мкм, молибденовая нить 30 мкм.

Экспериментальные данные изгиба 100 вольфрамовых нитей диаметром 15 мкм длиной 20 мм и шириной пластины 4,14 мм приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

№ п/п	$P_c + P_q$ , сН	$P_c$ , сН	Координата центра пластины, мм	
			$x_1$	$y_1$
1	0,049	0,042	16,0	12,75
2	0,055	0,048	15,0	12,6
3	0,048	0,040	16,5	11,0
4	0,052	0,043	13,7	14,1
5	0,057	0,050	15,3	12,3
6	0,063	0,057	13,1	14,4
7	0,073	0,067	13,7	14,9
8	0,040	0,033	14,3	13,9

Численное решение при сосредоточенной нагрузке  $P = 0,0496$  сН, распределенной –  $q = 0,0003 \frac{\text{сН}}{\text{мм}}$ ,  $\ell = 22,7$  мм дало  $N = 9,916$  сН×мм<sup>2</sup>. Модуль упругости при полученной величине  $N$  составил  $E=399$  ГПа.

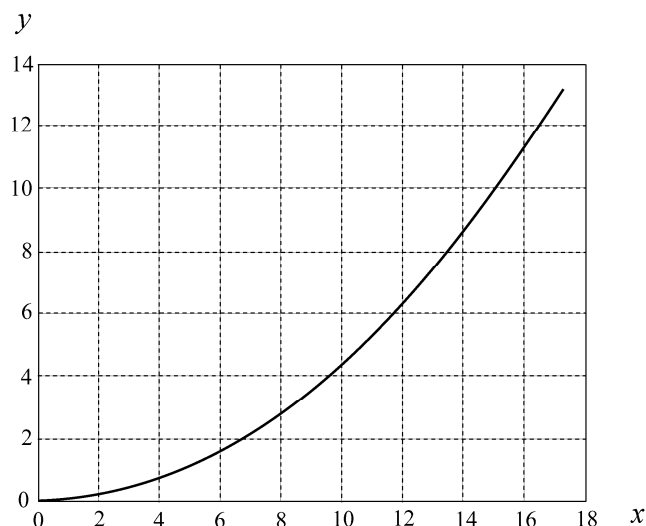


Рис. 3

В координатных осях  $xu$  форма кривой в условиях нагружения сосредоточенной и распределенной силами представлена на рис. 3.

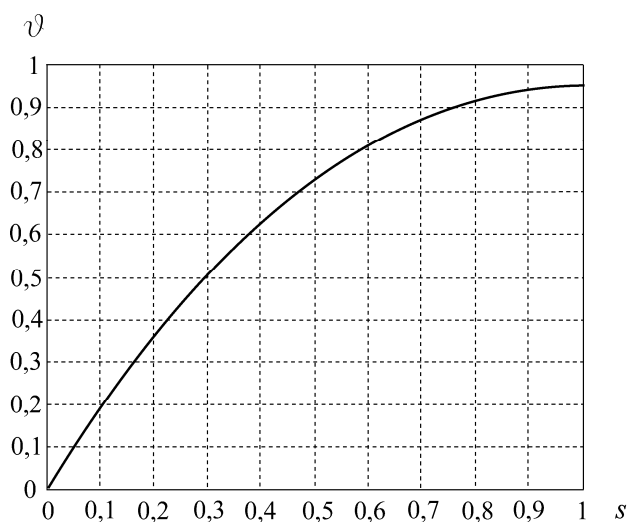


Рис. 4



Рис. 5

Кривые  $\vartheta(s)$  и  $\frac{d\vartheta(s)}{ds}$  приведены соответственно на рис. 4 и 5.

В упомянутой книге Дж. Белла [1] приведены упругие характеристики чистых металлов, полученные Кестером в кульминационных итоговых работах двадцатого века (мнение самого Белла) из анализа литературы и в результате собственных исследований. Вычисленная нами величина модуля упругости довольно близка к модулю, по-

лученному Кестером:  $E = 415,2$  ГПа. Кроме того, здесь надо учесть предшествующие температурные, механические и химические истории образца.

Сравнение полученной нами упругой постоянной  $E$  с приведенной в [1] величиной модуля упругости характеризует разработанный нами метод определения жесткости нити при изгибе как достаточно точный и надежный.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Белл Ф. Дж.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. – М.: Наука, 1984.

2. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 05.04.06.

---