

УДК 677.054.755

**РЕАЛИЗАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ  
И СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ  
В СИСТЕМАХ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ТЕКСТИЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ**

*Н.А. КОРОБОВ*

**(Ивановская государственная текстильная академия)**

В процессах имитационного моделирования важно обеспечить соответствие между характеристиками случайных составляющих поведения исследуемого объекта и его модели. В компьютерных системах для этих целей используются генераторы случайных чисел, обеспечивающие различные законы распределения вероятности. При этом анализ экспериментальных данных, направленный на выявление их соответствия тому или иному стандартному виду распределения, не всегда дает положительные результаты. Например, слу-

чайный разброс длины хлопковых волокон (как в пределах конкретного селекционного сорта, так и в смесях) не может быть описан ни одним из известных теоретических распределений.

Другой важной характеристикой случайных процессов является спектральная функция. Известно, что генераторы случайных чисел моделируют процесс, приближенный по спектральному составу к белому шуму. Такой спектр также не характерен для объектов, сформированных из текстильных волокон.

В данной работе рассматриваются варианты корректировки указанных характеристик генераторов случайных чисел на примере программного математического пакета MATLAB.

Рассмотрим способ получения случайных чисел с заданной функцией распределения [1], основанный на преобразовании равномерно распределенных случайных последовательностей. Пусть  $X$  – случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $0 \dots 1$ . Для получения случайной величины  $Y$ , имеющей функцию распределения  $F_y(y)$ , случайную величину  $X$  необходимо подвергнуть нелинейному преобразованию:

$$Y = F_y^{(-1)}(X), \quad (1)$$

где  $F_y^{(-1)}$  – функция, обратная по отношению к  $F_y(y)$ .

В результате такого преобразования случайная величина  $Y$  будет соответство-

вать требуемой функции распределения. Однако на практике рассмотренный способ может оказаться неприемлемым, поскольку обратные функции для многих законов (в том числе и для нормального) не выражаются через элементарные функции. Возможным решением возникшей проблемы является табличное описание требуемого закона распределения.

Создадим m-функцию `rnd_tabl`, позволяющую генерировать случайные числовые последовательности, закон распределения которых задан таблицей значений выборочных плотностей вероятности (или частот), полученных в результате экспериментальных исследований. По имеющейся выборочной плотности распределения путем численного интегрирования получим выборочную функцию распределения и далее численными методами осуществим преобразование последовательности равномерно распределенных случайных чисел в соответствии с требуемым законом.

```
function r_zn = rnd_tabl(h, lc, kr)
% Интегральная функция распределения
sc=cumsum([0 h]); sc=sc./sc(end);
% Случайные значения, подчиненные
% равномерному закону
v_rand=rand(1, kr);
% Номера классов, в которые попали
% случайные величины
n_cl=length(h)-...
sum(ones(length(h),1)...
*v_rand<sc(2:end))*ones(1,kr))+1;
dc=(lc(2)-lc(1));
% Линейная интерполяция
r_zn=(v_rand-...
sc(n_cl)).*(dc./(sc(n_cl+1)-...
sc(n_cl)))+c(n_cl)-dc/2;
```

Показанная m-функция требует задания трех входных параметров. Два первых ( $h$  – эмпирические частоты и  $lc$  – середины интервалов группировки) – являются векторами, описывающими эмпирическое распределение. С помощью третьего парамет-

ра ( $kr$ ) задается количество генерируемых случайных чисел.

В табл. 1 приведены данные исследования распределения хлопковых волокон по длинам на приборе системы Жукова.

Средняя длина группы волокон, мм	Истинная масса группы волокон, мг	Средняя длина группы волокон, мм	Истинная масса группы волокон, мг
7,5	0,14	25,5	3,24
9,5	0,38	27,5	4,64
11,5	0,60	29,5	4,86
13,5	0,83	31,5	3,68
15,5	1,20	33,5	2,07
17,5	1,54	35,5	0,89
19,5	1,80	37,5	0,28
21,5	1,88	39,5	0,05
23,5	2,21	-	-

Далее показан пример, в котором с помощью разработанной *m*-функции производится моделирование случайной числовой последовательности, распределение вероятности которой должно соответствовать описанию, приведенному в табл. 1.

```
% Средняя длина группы волокон, мм
lc=7.5:2:39.5;
% Истинная масса группы волокон, мг
h=[0.14 0.38 0.60 0.83 1.20 1.54...
1.80 1.88 2.21 3.24 4.64 4.86...
3.68 2.07 0.89 0.28 0.05];
bar(lc, h/sum(h)), hold on
% Обращение к функции rnd_tabl
r_zn = rnd_tabl(h, lc, 10000);
[tt, ct]=hist(r_zn, lc);
bar(ct,tt/sum(tt), 0.5,'c'), grid on
t='Средняя длина группы волокон, мм';
xlabel(t, 'Fontname', 'Arial Cyr')
ylabel('Масса, мг', 'Fontname',...
'Arial Cyr')
legend(...
'1- Заданное распределение', ...
'2- Результат моделирования')
```

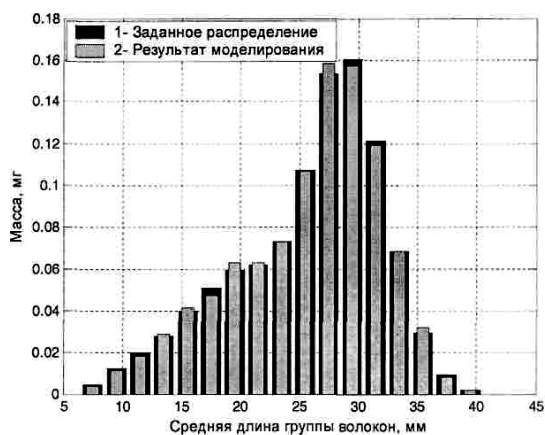


Рис. 1

С помощью приведенного программного фрагмента строятся две гистограммы (рис. 1), предназначенные для визуального сравнения заданного распределения и распределения случайных величин, полученных в результате работы функции *rnd\_tabl*. Анализ приведенных на рис. 1 гистограмм позволяет предположить, что распределение случайных величин, полученных с помощью показанной выше *m*-функции, соответствует заданному. Для подтверждения гипотезы воспользуемся критерием согласия Колмогорова – Смирнова, реализованным в пакете MATLAB в виде функции *kstest*.

```
sc=cumsum([0 h]); sc=sc./sc(end);
e_cdf=sc./sc(end); dc=lc(2)-lc(1);
ccdf=linspace(lc(1)- ...
dc/2,lc(end)+dc/2, length(lc)+1);
% Тест Колмогорова-Смирнова
% на соответствие выборки
% заданному распределению
kstest(r_zn, [ccdf; e_cdf]', 0.01)
```

Проверка, проведенная с помощью функции *kstest*, подтверждает гипотезу о соответствии выборки заданному распределению с уровнем значимости, равным 0,99.

Когда требуется обеспечить воспроизведение случайного процесса, обладающего определенным спектром, необходимо сигнал генератора случайных чисел (например, сигнал, получаемый с помощью стандартной функции *randn*) пропустить через фильтр с соответствующей амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ). Таким образом, поставленная задача решается в три этапа:

- определение спектра моделируемого процесса;
- проектирование цифрового фильтра с соответствующей АЧХ;
- фильтрация сигнала генератора случайных чисел.

В качестве примера осуществим моделирование случайных колебаний линейной плотности продуктов прядильного производства. Будем считать, что продукт состоит из волокон различной длины, при этом все волокна имеют одинаковую линейную плотность. Спектр плотности дисперсии такого продукта представим в виде суммы спектральных компонентов, соответствующих волокнам различной длины [2]. Следующая m-функция вычисляет нормированный спектр плотности дисперсии волокнистого продукта (nd) и соответствующую ему амплитудно-волновую характеристику (ABX) фильтра (aw).

```
function [nd, aw]=ndisp(h, lc, ls)
h=h./sum(h);
nd=zeros(size(ls));
% Нормированная плотность дисперсии
for i=1:length(h)
cdisp=h(i)*(1-
cos(2*pi*lc(i)./ls))./(lc(i)*pi^2);
nd=nd+cdisp;
end
% Переход от спектра плотности дис-
персии
% к ABX фильтра
aw=sqrt(pi*ls.*nd/2);
```

При обращении к функции ndisp два первых входных вектора (h и lc) описывают распределение волокон по длинам, а третий вектор (ls) задает длины волн, для которых будет формироваться спектральная характеристика. Поскольку для представления спектральной характеристики текстильных продуктов чаще всего используют полулогарифмическую шкалу, расчет абсцисс спектрограммы и обращение к функции ndisp осуществляется следующим образом.

```
i=1:198;
% Абсциссы спектрограммы, мм
ls=10*2.^((i-1)/12);
[nd, aw]=ndisp(h, lc, ls);
```

Для расчета коэффициентов передаточной функции рекурсивного цифрового фильтра воспользуемся функцией MATLAB yulewalk. Описание работы и особенности задания входных параметров данной функции приведены в [1]. Здесь необходимо отметить, что один из входных векторов функции должен содержать значения частот, нормированные к частоте Найквиста (частота Найквиста равна половине частоты дискретизации аналогового сигнала). Для этого при вычислении значений нормированных частот (fg) в следующем программном примере используется величина пространственного периода дискретизации, принятая для большинства устройств лабораторного контроля неровности продуктов прядения, равная двум миллиметрам.

Кроме того, существует необходимость дополнительной коррекции ABX, полученной с помощью функции ndisp. Дело в том, что, как выяснилось в результате предварительного машинного эксперимента, плотность дисперсии случайного сигнала, получаемого с помощью генератора случайных чисел randn, не является постоянной (то есть такой случайный сигнал в широком диапазоне длин волн нельзя считать белым шумом). После обработки данных машинного эксперимента получены значения функционального корректирующего множителя (km). В конечном итоге расчет коэффициентов передаточной функции рекурсивного цифрового фильтра (векторов b и q) осуществляется следующим образом.

```
td=2; % Период дискретизации, мм
fg=2*td./ls; % Нормированные частоты
% Дополнительная коррекция
km=3,8065*exp(polyval([0.5347-2.0326],
log(ls/td)));
[b,q]=yulewalk(23, [0 fliplr(fg) 1], [1
fliplr(km.*aw) 0]);
```

Коэффициенты передаточной функции (b и q) необходимы для работы функции filter, осуществляющей процесс фильтрации. Далее показан пример моделирования случайных колебаний линейной плотности отрезка волокнистого продукта длиной 800 м (400000 отсчетов).

```
y=randn(1,400000);
y_s=filter(b, q, y-mean(y));
```

Совместная работа функций randn и filter обеспечивает выходному массиву случайных значений (y\_s) дисперсию и среднеквадратическое отклонение, приблизительно равные единице. При этом выходной массив представляет собою переменную составляющую сигнала, несущего информацию о колебаниях линейной плотности моделируемого продукта. Чтобы создать полный сигнал, добавим в него постоянную составляющую. Необходимое соотношение между разбросом случайной составляющей и средним значением сигнала определим с помощью формулы Мартиндейла [2]. Например, если моделируется продукт, имеющий в своем поперечном сечении 1000 волокон, то для окончательного формирования сигнала необходимо выполнить следующие действия:

```
% Количество волокон в поперечном
сечении продукта
n=1000;
% Среднеквадратическое отклонение
% нормированного сигнала
S=100/sqrt(n);
yp=S.*y_s+100; % Полный нормиро-
ванный сигнал
```

Анализ сформированного сигнала (yp) был осуществлен с помощью спектроанализатора программного комплекса [3]. На рис. 2 показан спектр плотности мощности сигнала (yp) в сравнении с расчетной спектральной кривой, полученной путем умножения нормированного спектра (nd) на величину дисперсии ( $S^2$ ). Как показывает рисунок, имеется хорошее совпадение рас-

четной кривой и спектра сгенерированной последовательности случайных чисел, что, кроме того, подтверждается достаточно высоким значением коэффициента детерминации, равным 0,99.



Рис. 2

## ВЫВОДЫ

1. Разработаны методы коррекции работы генераторов случайных чисел, обеспечивающие соответствие их вероятностных и спектральных характеристик различным текстильным объектам.
2. Полученные данные подтверждают возможность использования предложенных методов в системах имитационного моделирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002.
2. Севостьянов А.Г. Методы исследования неравноты продуктов прядения. – М.: Ростехиздат, 1962.
3. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2003610549. Программный комплекс для анализа неравномерности линейной плотности волокнистых продуктов (VOLNA) / Н.А. Коробов, С.Ю. Павлычев, Н.А. Румянцев. – Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. – М., 2003.

Рекомендована кафедрой прикладной математики и информационных технологий. Поступила 01.12.06.