УДК 687.021.531.36

ЗАДАЧА О РАЗВИТИИ РАЗРЫВА ТКАНИ В ОКРЕСТНОСТИ РАЗРЕЗА

Е.В. ПОЛЯКОВА, П.А. ДЯТЛОВА

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

Наиболее развитые методы изучения процессов разрушения материалов [1], [2] ограничиваются, как правило, рассмотрением материалов, имеющих жесткие надмолекулярные структуры. Изучение материалов текстильного производства, которые часто имеют малую сдвиговую жесткость, требует значительной трансформации и развития этих методов.

В настоящей работе возможность разрушения ткани путем увеличения возникшего в ней отверстия изучается на примере растяжения полотна, ослабленного разрезом.

Рассмотрим описание напряженно-деформированного состояния ткани. В [3] и [4] получено общее решение уравнений равновесия подвергаемого растяжению куска ткани в предположении, что его напряженно-деформированное состояние имеет две оси симметрии x и y, а первоначальный разрез расположен на оси y. Кроме того, сформулированы граничные условия для выделения частного решения, соответствующего растяжению указанного куска распределенными силами P и T в поперечном и продольном направлениях.

Оказалось, что весь кусок ткани разделяется на четыре части: две из них (1 и 4) располагаются выше и соответственно ниже разреза, и две части (3 и 2) примыкают к разрезу слева и справа. При этом получили, что перемещения u и v, а также напряжения σ^1_{11} и σ^1_{22} первой части определяются формулами:

$$u(\xi,\eta)=0\,,\ v(\xi,\eta)=V_2(h)\,,$$
$$\sigma^1_{11}(\xi,\eta)=T\,,\ \sigma^1_{22}(\xi,\eta)=P\,. \tag{1}$$

Здесь ξ и η – лагранжевы координаты частиц ткани, введенные так, что при недеформированном ее состоянии они совпадают с декартовыми координатами x и y этих частиц.

Из (1) видно, что первая и четвертая части смещаются, не деформируясь, к оси x на величину $V_2(h)$, а напряжения во всех точках этих частей одинаковы.

На втором участке ткани [4] напряжения определяются формулами:

$$\sigma_{11}^2(\xi,\eta)=\frac{T}{L}\xi,\quad \sigma_{22}^2(\xi,\eta)=\frac{P}{1+V_2'(\eta)},\ (2)$$

а перемещения точек второй части удовлетворяют уравнению:

$$\sigma_{11}^2(\xi,L)=-P\xi\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{U_2'(\eta)}{1+V_2'(\eta)}\right)=T.\quad (3)$$

Из (3) и из условия нерастяжимости нитей получаем дифференциальные уравнения для отыскания смещений частиц ткани:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{U_2'(\eta)}{1+V_2'(\eta)}\right)=-\frac{T}{PL},$$

$$U_2'(\eta)=-\sqrt{1-\left(1+V_2'(\eta)\right)^2}.\quad (4)$$

Согласно (4), определяя постоянную интегрирования из условий симметрии, имеем

$$V_2(\eta)=-\eta\pm\frac{1}{B}\ln(B\eta+\sqrt{B^2\eta^2+1}),\ B=\frac{T}{PL}.\ (5)$$

Равенства (4) и (5) приводят к следующему уравнению для определения $U_2(\eta)$:

$$U_2'(\eta)=-\frac{B\eta}{\sqrt{B^2\eta^2+1}}.\quad (6)$$

Из (6) имеем

$$U_2(\eta)=-\frac{1}{B}\sqrt{B^2\eta^2+1}+C,\quad (7)$$

где постоянная интегрирования C должна быть определена из условия равенства горизонтальных перемещений точек ткани, лежащих на общей границе ее первой и второй частей.

Поскольку точки первой части согласно [3] не перемещаются в горизонтальном направлении, следует выбрать C таким образом, чтобы равенство (7) приняло вид:

$$U_2(\eta)=\frac{1}{B}\left(\sqrt{B^2h^2+1}-\sqrt{B^2\eta^2+1}\right).\quad (8)$$

Равенства (5) и (8) позволяют записать следующие параметрические уравнения контуров поперечных нитей:

$$x=\xi+\frac{1}{B}\left(\sqrt{B^2h^2+1}-\sqrt{B^2\eta^2+1}\right),$$

$$y=\pm\frac{1}{B}\ln\left(B\eta+\sqrt{B^2\eta^2+1}\right).\quad (9)$$

В верхней половине рассматриваемого куска ткани соответствуют положительные значения y и соответственно в выражениях (5) и (9) должен быть взят верхний знак.

Равенства (9) означают, что все поперечные нити второй части рассматриваемого участка ткани имеют одинаковые формы, повторяющие форму кромки отверстия. Тангенс угла наклона этих нитей к оси x определяется формулой

$$\mathrm{tg}\gamma=\frac{dy}{dx}=-\frac{PL}{T\eta}.\quad (10)$$

Проанализируем напряженное состояние ткани и условия ее разрушения.

Используя (2), напряжения во второй части ткани представим формулами

$$\sigma_{11}^2(\xi,\eta)=\frac{T}{L}\xi,\ \sigma_{22}^2(\xi,\eta)=\sqrt{T^2\frac{\eta^2}{L^2}+P^2}.\ (11)$$

Из (11) и (1) видно, что напряжения горизонтальных волокон нигде не превосходят величины T, кроме той особой группы волокон, которая расположена в узком "пограничном слое", разделяющем первую и вторую части. Напряжения в поперечных волокнах, располагающихся вдоль криволинейных координатных линий $\xi = \text{const}$, достигают максимального значения на "пограничном слое" и это значение равно

$$\sigma_{22}^{\max} = \sigma_{22}^{2}(\xi, h) = \sqrt{T^2 \frac{h^2}{L^2} + P^2}. \quad (12)$$

Для того, чтобы изучить напряжения в "пограничном слое", заметим, что волокна, расположенные в первой части, то есть выше этого слоя, не действуют на него горизонтальными усилиями, а горизонтальное воздействие на него волокон второй части характеризуется плотностью $\sigma_{22}^{\text{гор}}$, которая с учетом (10) и (11) может быть представлена следующим образом:

$$\sigma_{22}^{\text{гор}} = \sigma_{22}^{2}(\xi, h)\cos\gamma = \frac{Th}{L}. \quad (13)$$

Следовательно, вся совокупность волокон, составляющих "пограничный слой", в сечении, соответствующем лагранжевой координате ξ, натянута усилием, равным

$$F = \sigma_{22}^{\text{гор}}(L - \xi) + T\Delta\eta = \frac{Th}{L}(L - \xi). \quad (14)$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что максимальное усилие, выдерживаемое волокнами пограничного слоя, достигается на вершине разреза и равно

$$F_{\max} = Th. \quad (15)$$

Если ограничиться рассмотрением малорастяжимых сеток с ячейками достаточно малого размера, то можно считать, что толщина "пограничного слоя" равна стороне ячейки Δ, то есть сдвиговое усилие между первой и второй частями полотна полностью воспринимается одной разделяющей их нитью и имеет максимальное значение

$$F_{11}^{\max} = Tk\Delta, \quad (16)$$

где k – число ячеек, пересеченных разрезом.

Максимальное значение усилий в поперечных нитях:

$$F_{22}^{\max} = \frac{\Delta}{L}\sqrt{T^2h^2 + P^2L^2} = \sqrt{T^2\frac{k^2}{K^2} + P^2}\,\Delta, \quad (17)$$

где K – число ячеек, пересеченных осью x.

При сравнении величин (16) и (17) обнаруживается сложный характер зависимости распространения разрыва от размеров рассматриваемого отрезка ткани, от ориентации и размеров разреза, от величин растягивающих усилий и от прочности используемых нитей. Если величины T и P имеют одинаковый порядок, а прочность продольных и поперечных нитей одинакова, разрушение будет происходить у вершин разреза за счет разрыва перпендикулярных к нему нитей. В случаях, когда величина P существенно больше, чем T, разрушение может происходить за счет разрыва нитей, параллельных разрезу.

ВЫВОДЫ

1. Определены напряжения и деформации, возникающие при растяжении прямоугольного отрезка ткани с внутренним разрезом.

2. Получены формулы, позволяющие при задаваемой прочности образующих ткань нитей определить место и характер разрушения ткани при увеличении растягивающих усилий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. – М.: Наука, 1984.

2. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1983.

3. *Полякова Е.В., Дятлова П.А.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2007, № 2. С.133...135.

4. *Полякова Е.В., Дятлова П.А.* //Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2007, № 3. С.131...134.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 23.01.07.