УДК 620.1.08.620.22

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ ДЕФОРМАЦИИ

И.А. ШЕРОМОВА, Г.П. СТАРКОВА, А.С. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, О.И. КУДРЯШОВ

(Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Новосибирский технологический институт МГУДТ)

При выборе материалов для производства швейных изделий параметры подготовительных и термомеханических операций, в частности, режимы декатировочных процессов и влажно-тепловой обработки (ВТО) определяются в основном опытным путем. В связи с этим в производственной практике необходимо проводить постоянную коррекцию технологических режимов и их адаптацию к требуемым условиям. Например, для обеспечения эксплуатационной формоустойчивости швейных изделий на стадии ВТО опытным путем определяют и корректируют продолжительность действия рабочих органов технологического оборудования в зависимости от вида обрабатываемых материалов и режимов процесса: температуры, давления, влаги и т.д. Такой подход к выбору режимов обработки обусловлен отсутствием эффективных методов и доступных технических средств.

Экспериментально установлено [1], что в процессе релаксации напряженного состояния легкодеформируемых материалов значимо изменяются их динамические характеристики, в частности, фазовые скорости и собственные частоты колебаний, которые могут быть информативными параметрами при разработке инструментальных методов исследования.

Из [2] и [3] известно, что при колебаниях однородной пластины (рис.1 – схема к расчету колебаний однородной пластины легкодеформируемого материала) прогиб y(x, t) является функцией линейной координаты (x) и времени (t). С некоторыми допущениями уравнение вынужденных колебаний полоски текстильного материала под действием внешней силы f(x, t) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = f(x, t), \quad (1)$$

где $f(x, t) = \dfrac{1}{\rho S} F(x, t)$; ρ – объемная плотность; S – площадь поперечного сечения пластины; F(x,t) – внешняя сила, изменяющаяся во времени и рассчитанная на единицу длины материала; $b=\sqrt{\dfrac{EJg}{p}}$; EJ – изгибная жесткость материала в плоскости колебаний; p – погонный вес; g – гравитационная постоянная.

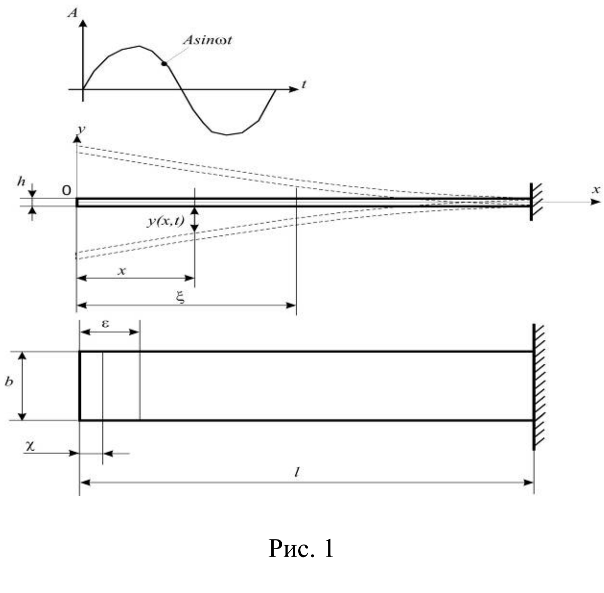

Рис. 1

Рассмотрим задачу как начально-краевую на отрезке $x \in [0;1]$ с нулевыми начальными условиями:

$$y(x,t)\big|_{t=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия в случае жесткого закрепления правого конца отрезка, а левый при этом условно свободен, зададим следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} & y(x,t)_{x=l} = \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\ell} = 0 \\ & \left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=0} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Возмущающая сила $f(x,t)$ сосредоточена в точке x=0, то есть:

$$f(x,t) = \begin{cases} A\sin\omega t & \text{при} \quad x = 0; \\ 0 & \text{при} \quad x \neq 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Согласно методу Фурье разделения переменных решение соответствующего однородного уравнения свободных колебаний при f(x,t)=0 получим в виде $y_n(x,t) = K\varphi_n(x)T_n(t)$ [4].

Выполняя стандартные действия метода разделения переменных и используя граничные условия (3) будем иметь:

$$T_n(t) = \sin\left(\lambda_n^2 bt\right), \qquad (5)$$

$$\varphi_n(x) = C\left[(sh\lambda_n\ell + \sin\lambda_n\ell)(ch\lambda_n x + \cos\lambda_n x) - \left(ch\lambda_n\ell + \cos\lambda_n\ell\right)(sh\lambda_n x + \sin\lambda_n x)\right], \qquad (6)$$

где λ_n – положительные корни трансцендентного уравнения вида:

$$ch(\lambda_n\ell)\cos(\lambda_n\ell) = -1. \qquad (7)$$

Спектр собственных частоты колебаний (f_i), рассчитанных по выражению $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi}\sqrt{\frac{E_i' Ig}{p}}$ [3], для образца костюмной ткани (арт. 2330) с начальными параметрами: $p = 0,14$; E_0'=1,42МПа; длиной ℓ=0,225 м, шириной $b = 0,05$м и толщиной $h = 0,0013$м для ненагруженных условий представлен в табл. 1.

Таблица 1

ε_i,%	E_i' МПА	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	...	f_n
0	1,42	0,33	2,09	5,85	11,46	18,97	28,33		
1	1,52	0,34	2,16	6,05	11,86	19,62	29,31		
2	1,63	0,36	2,24	6,26	12,28	20,32	30,35		
3	1,75	0,37	2,32	6,49	12,72	21,06	31,45		
4	1,95	0,39	2,45	6,85	13,43	22,23	33,19		
5	2,22	0,42	2,61	7,31	14,33	23,72	35,42		

Решение уравнения (1) будем базировать на введении функции влияния Грина [5], для определения которой рассмотрим методику ее построения. В этом случае решение уравнения с заданными начальными и краевыми условиями (2) и (3) представим в виде ряда:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\varphi_n(x), \qquad (8)$$

где $\varphi_n(x)$ – собственные функции.

Подставляя (8) в уравнение (1), имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)\varphi_n(x) + b^2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\varphi_n^{(4)}(x) = f(x,t). \qquad (9)$$

Предполагаем, что функция $f(x,t)$ разлагается в ряд по собственным функциям $\varphi_n(x)$, тогда получим:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n f_n(t)\varphi_n(x), \qquad (10)$$

где $B_n f_n(t)$ в силу ортогональности $\varphi_n(x)$ на отрезке $[0;\ell]$ находятся следующим образом [4]:

$$B_n f_n(t)=\frac{\int_0^{\ell} f(\xi,t)\varphi_n(\xi)d\xi}{\|\varphi_n\|^2}, \qquad (11)$$

где $\|\varphi_n\|^2$ – квадрат нормы собственной функции $\varphi_n(x)$ в пространстве функций, интегрируемых с квадратом.

Из (9) находим:

$$\sum_{n=1`}^{\infty}\left(T_n''(t)+b^2\lambda_n^4 T(t)\right)\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\varphi_n(x)f_n(t).$$

Отсюда

$$T_n''(t)+b^2\lambda_n^4 T_n(t)=B_n f_n(t). \qquad (12)$$

Решим это дифференциальное уравнение методом Лагранжа вариации произвольных постоянных, то есть ищем общее решение в виде:

$$T(t)=u(t)\cos(b\lambda_n^2 t)+v(t)\sin(b\lambda_n^2 t). \qquad (13)$$

Составим систему уравнений для $\dot{u}$ и $\dot{V}$:

$$\begin{cases}\dot{u}\cos(b\lambda_n^2 t)+\dot{v}\sin(b\lambda_n^2 t)=0,\\ -\dot{u}b\lambda_n^2\sin(b\lambda^2 t)+\dot{v}b\lambda_n^2\cos(b\lambda_n^2 t)=B_n f_n(t).\end{cases} \qquad (14)$$

Тогда

$$T_n(t)=\frac{1}{b\lambda_n^2}d\tau=\frac{1}{b\lambda_n^2}\int_0^t B_n f_n(\tau)\left(\sin(b\lambda_n^2 t)\cos(b\lambda_n^2\tau)-\cos(b\lambda_n^2 t)\sin(b\lambda_n^2\tau)\right)d\tau=$$
$$=\frac{1}{b\lambda_n^2}\int_0^t B_n f_n(\tau)\sin\left(b\lambda_n^2(t-\tau)\right)d\tau. \qquad (15)$$

Следовательно, согласно (8) и (15) получим:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b\lambda_n^2}\int_0^t B_n f_n(\tau)\sin\left(b\lambda_n^2(t-\tau)\right)\varphi_n(x)d\tau. \qquad (16)$$

Подставив (11) в (16), будем иметь:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b\lambda_n^2}\int_0^t\frac{\int_0^{\ell} f(\xi,\tau)\varphi_n(\xi)d\xi}{\|\varphi_n\|^2}\sin\left(b\lambda_n^2(t-\tau)\right)\varphi_n(x)d\tau.$$

Меняя суммирование с интегрированием местами, записываем:

$$y(x,t)=\int_0^t\int_0^\ell f(\xi,\tau)\frac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n{}^2\left\|\varphi_n\right\|^2}\sin\left(\lambda_n^2 b(t-\tau)\right)d\xi d\tau, \tag{17}$$

или, если обозначить

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2\left\|\varphi_n\right\|^2}\sin(\lambda_n^2 bt), \tag{18}$$

то формула (17) примет вид:

$$y(x,t)=\int_0^t\int_0^\ell G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{19}$$

где $G(x,\xi,t-\tau)$ и есть функция Грина.

Рассматривая предлагаемую методику построения модели прогиба однородной пластины при заданных начальных условиях, необходимо также определить квадрат нормы собственной функции.

Воспользуемся известной формулой А.Н. Крылова [6]:

$$\left\|\varphi_n\right\|^2=\int_0^\ell\varphi_n{}^2(x)dx=\frac{\ell}{4}\varphi_n{}^2(\ell)+\frac{\ell}{4\lambda_n{}^4}(\varphi_n''(\ell))^2-\frac{\ell}{2\lambda_n{}^4}\varphi_n'(\ell)\varphi_n'''(\ell). \tag{20}$$

Тогда вычисляя значения функции $\varphi_n(x)$ и ее производных при $x=\ell$, получим:

$$\left\|\varphi_n\right\|^2=\ell C^2\left(ch^2(\lambda_n\ell)\sin^2(\lambda_n\ell)+sh^2(\lambda_n\ell)\cos^2(\lambda_n\ell)+2sh(\lambda_n\ell)\sin(\lambda_n\ell)\right). \tag{21}$$

Рассмотрим возмущающую силу (4) как предельный случай той ситуации, когда f(x,t) действует лишь на промежутке $(0;\varepsilon)$, а вне этого промежутка действие силы равно нулю.

Тогда

$$\int_0^\varepsilon f(\xi,\tau)d\xi\to f(0,\tau)\quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0.$$

Согласно интегральной теореме о среднем

$$\int_0^\ell f(\xi,\tau)\varphi_n(\xi)d\xi=\int_0^\varepsilon f(\xi,\tau)\varphi_n(\xi)d\xi=\varphi_n(\chi)\int_0^\varepsilon f(\xi,\tau)d\xi. \tag{22}$$

$$(0<\chi<\varepsilon).$$

При $\varepsilon\to 0$:

$$\varphi_n(\chi)\int_0^\varepsilon f(\xi,\tau)d\xi\to\varphi_n(0)f(0,\tau). \tag{23}$$

Вычислим $\varphi_n(0)$:

$$\varphi_n(0)=2C\left(sh\lambda_n\ell+\sin\lambda_n\ell\right). \tag{24}$$

Тогда из (17) и (22) получим:

$$y(x,t)=\frac{A}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(0)}{\lambda_n{}^2\left\|\varphi_n\right\|^2}\int_0^t\sin(\omega\tau)\sin\left(\lambda_n{}^2 b(t-\tau)\right)d\tau. \tag{25}$$

Отдельно вычислим определенный интеграл по τ в формуле (25):

$$\int\limits_0^t \sin\omega\tau \sin\left(\lambda_n{}^2 b(t-\tau)\right)d\tau = \frac{\lambda_n{}^2 b}{\lambda_n{}^4 b^2 - \omega^2}\sin\omega t - \frac{\omega}{\lambda_n{}^4 b^2 - \omega^2}\sin\lambda_n{}^2 bt. \qquad (26)$$

Подставив полученный результат интегрирования в (25), окончательно получим математическую модель прогиба однородной пластины легкодеформируемого композита:

$$y(x,t) = A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(0)\sin\omega t\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|^2(\lambda_n^4 b^2-\omega^2)} - \frac{A\omega}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(0)\sin\lambda_n^2 bt\varphi_n(x)}{\lambda_n^2\|\varphi_n\|^2(\lambda_n^4 b^2-\omega^2)}. \qquad (27)$$

В этой итоговой формуле $\varphi_n(0)$ вычисляется по формуле (24), $\|\varphi_n\|^2$ – по формуле (21), $\varphi_n(x)$ – по формуле (6).

Анализируя результаты компьютерного моделирования математической модели (27) прогиба однородного образца материала при действии фиксированной частоты вынужденных колебаний, видим (рис.2 – параметрические колебания легкодеформируемой пластины из текстильного материала (костюмная ткань, арт. 2330; $A = 0{,}01$ м, $f_0 = 18{,}967$); $y_0(x,t)$ при $E_0 = 1{,}42$ МПа; $y_1(x,t)$ при $E_1 = 1{,}52$ МПа; $y_2(x,t)$ при $E_2 = 1{,}63$ МПа; $y_3(x,t)$ при $E_3 = 1{,}75$ МПа; $y_4(x,t)$ при $E_5 = 1{,}95$ МПа; $y_5(x,t)$ при $E_5 = 2{,}22$ МПа.), что изменение модуля упругости (напряжения) материала, ведет к трансформации параметров собственных колебаний**,** что соответствует представлениям о физике процесса.

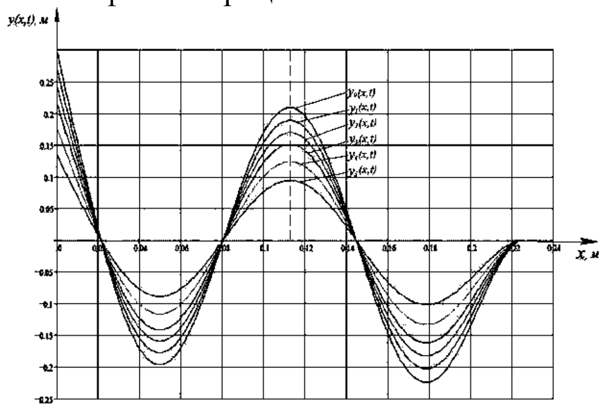

Рис. 2

Кроме того, результаты исследования показывают, что зависимость параметров колебаний от НДС материала (в диапазоне между двумя их главными частотами) представляет собой монотонную нелинейную функцию (рис. 3 – зависимость амплитуды вынужденных параметрических колебаний (для $x = 0.116$ м) от напряженно-деформированного состояния материала).

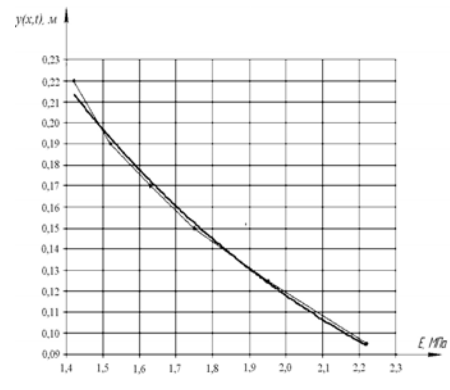

Рис. 3

Из общего анализа модели прогиба и ее графического отображения следует, что при релаксации напряжения легкодеформируемых материалов и $\varepsilon = \text{const}$ изменяются их динамические свойства и соответственно параметры вынужденных колебаний.

Изменяющиеся характеристики вынужденных колебаний могут являться информативными параметрами процесса релаксации напряжения при фиксированной деформации, что может быть базовой основой для разработки методов и средств исследования релаксации НДС легкодеформируемых композитов при фиксированной деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беличенко К.К., Мишаков В.Ю., Железняков А.С.* Экспериментальное исследование НДС мягких композитов посредством механических колебаний //Материаловедение. – 2004, №10. С.19...22.

2. *Крауфорд Ф.* Берклеевский курс физики. Волны. – Т. 3. – М.: Наука, 1984.

3. *Афанасьев А.М., Марьин В.А.* Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1975.

4. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – Т. II. – М.: ГИФМЛ, 1962.

5. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2001.

6. *Крылов А.Н.* Собр. тр.: Математика. – Ч.2. – М.: Изд. АН СССР, 1949.

Рекомендована кафедрой сервиса и моды ВГУЭС. Поступила 29.05.07.