ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 1 (235) ТЕХНОЛОГИЯ ТЕКСТИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ 1997

УДК 677.017:539.3

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ПРЯЖИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА*

В. П. ЩЕРБАКОВ

(Московская государственная текстильная академия им. А. Н. Косыгина)

Введем ортогональную систему координат, связанную с осевой линией волокна (рис. 1). Три вектора: касательная τ, главная нормаль ν и бинормаль β образуют естественный трехгранник винтовой линии. Главная нормаль к винтовой линии во всех ее точках совпадает с нормалью к цилиндру. В некоторой точке M на волокне зададим цилиндрическую систему координат (e_x, e_r, e_φ).

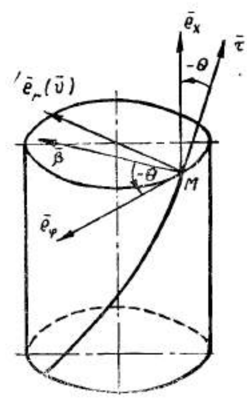

Рис. 1.

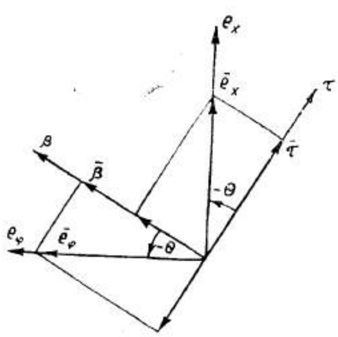

Рис. 2.

Расположим оси таким образом, чтобы ось ν естественного трехгранника совпала с осью e_r, направленной к центру нити, а ось e_x направим вдоль оси нити. Цилиндрические оси образуют правую тройку векторов, повернутых относительно оси ν, совпадающей с направлением оси e_r, на отрицательный угол Θ. Найдем выражения перехода от одного ортогонального базиса к другому. Из рис. 2

$$\begin{aligned}
&\bar{\nu}=\bar{e}_r,\\
&\bar{e}_x=\bar{\tau}\cos\Theta+\bar{\beta}\sin(-\Theta),\\
&\bar{e}_\varphi=-\bar{\tau}\sin(-\Theta)+\bar{\beta}\cos\Theta.
\end{aligned}\tag{1}$$

Соответствующая матрица перехода запишется в виде

* Окончание. Начало см. в № 6 за 1996 г.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad\overline{\tau} & \quad\overline{\nu} & \quad\overline{\beta} \end{array} \\ [l_{ij}]=\begin{array}{c} \overline{e}_x \\ \overline{e}_r \\ \overline{e}_\varphi \end{array} & \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (2)$$

Элементы матрицы $[l_{ij}]$ можно рассматривать как направляющие косинусы между векторами базисов $\{\overline{\tau}, \overline{\nu}, \overline{\beta}\}$ и $\{\overline{e}_x, \overline{e}_r, \overline{e}_\varphi\}$.

С учетом введенных элементов и соотношений, характеризующих структуру нити, рассмотрим преобразование матрицы коэффициентов $[E_{ij}]$ при переходе к матрице жесткости $[C_{ij}]$. Напряжения в цилиндрических координатах σ'_{kl} связаны с напряжением в естественных координатах σ_{ij} соотношением:

$$\sigma'_{kl}=\sigma_{ij}l_{ki}l_{lj}. \qquad (3)$$

Для примера записываем одно из системы уравнений в развернутом виде:

$$\sigma'_{11}=\sigma_{11}l_{11}+\sigma_{12}l_{11}l_{12}+\sigma_{13}l_{11}l_{13}+\sigma_{21}l_{12}l_{11}+ \\ +\sigma_{22}l_{12}+\sigma_{23}l_{12}l_{13}+\sigma_{31}l_{13}l_{11}+\sigma_{32}l_{13}l_{12}+\sigma_{33}l_{13} \qquad (4)$$

и, заменяя индексы ij и kl по правилу [(3).1], и приводя подобные члены, получаем

$$\sigma_1'=\sigma_1 l^2_{11}+\sigma_2 l^2_{12}+\sigma_3 l^2_{13}+2\sigma_4 l_{11}l_{12}+ \\ +2\sigma_5 l_{11}l_{13}+2\sigma_6 l_{12}l_{13}. \qquad (5)$$

Система уравнений (3) в матричных обозначениях принимает вид

$$\sigma'_i=g_{ij}\sigma_j, \qquad (6)$$

где коэффициенты g_{ij} имеют значения, указанные в табл. 1.

Таблица 1

i/j	1	2	3	4	5	6
1	$l_{11}l_{11}$	$l_{12}l_{12}$	$l_{13}l_{13}$	$2l_{11}l_{12}$	$2l_{11}l_{13}$	$2l_{12}l_{13}$
2	$l_{21}l_{21}$	$l_{22}l_{22}$	$l_{23}l_{23}$	$2l_{21}l_{22}$	$2l_{21}l_{23}$	$2l_{22}l_{23}$
3	$l_{31}l_{31}$	$l_{32}l_{32}$	$l_{33}l_{33}$	$2l_{31}l_{32}$	$2l_{31}l_{33}$	$2l_{32}l_{33}$
4	$l_{11}l_{21}$	$l_{12}l_{22}$	$l_{13}l_{23}$	$l_{11}l_{22}+l_{12}l_{21}$	$l_{11}l_{23}+l_{13}l_{21}$	$l_{12}l_{23}+l_{13}l_{22}$
5	$l_{11}l_{31}$	$l_{12}l_{32}$	$l_{13}l_{33}$	$l_{11}l_{32}+l_{12}l_{31}$	$l_{11}l_{33}+l_{13}l_{31}$	$l_{12}l_{33}+l_{13}l_{32}$
6	$l_{21}l_{31}$	$l_{22}l_{32}$	$l_{23}l_{33}$	$l_{21}l_{32}+l_{22}l_{31}$	$l_{21}l_{33}+l_{23}l_{31}$	$l_{22}l_{33}+l_{23}l_{32}$

В нашем случае, когда матрица перехода $[l_{ij}]$ записывается в виде (2), табл. 1 примет вид табл. 2.

Таблица 2

i/j	1	2	3	4	5	6
1	$\cos^2\Theta$	0	$\sin^2\Theta$	0	$-2\sin\Theta\cos\Theta$	0
2	0	1	0	0	0	0
3	$\sin^2\Theta$	0	$\cos^2\Theta$	0	$2\sin\Theta\cos\Theta$	0
4	0	0	0	$\cos\Theta$	0	$-\sin\Theta$
5	$\sin\Theta\cos\Theta$	0	$-\sin\Theta\cos\Theta$	0	$\cos^2\Theta-\sin^2\Theta$	0
6	0	0	0	$\sin\Theta$	0	$\cos\Theta$

Матрица коэффициентов жесткости E_{ij} при переходе от волокон к нити преобразуется по формуле:

$$C_{il}=E_{jk}g_{ij}g_{lk}. \tag{7}$$

Заметим, что трансверсально-изотропный материал при повороте осей координат вокруг главной нормали в новых координатах уже не является монотропным. Если бы оси координат были повернуты произвольно, то имели бы 21 коэффициент, то есть поведение материала не отличалось бы от полностью анизотропного состояния. В связи с этим необходимо определить все постоянные жесткости нити. Кроме этого учтем, что коэффициенты упругости отдельного волокна преобразуются к новым осям координат, связанным с нитью.

В дальнейшем вклады отдельных волокон в жесткость нити определенным образом будут усреднены. А пока коэффициенты упругости индивидуального волокна в новых осях обозначим через C^*_{il} в отличие от постоянных жесткости нити C_{il}.

В соответствии с (7) запишем

$$\begin{aligned}C^*_{11}&=E_{ik}g_{1j}g_{1k}=E_{11}g_{11}g_{11}+E_{12}g_{11}g_{12}+E_{13}g_{11}g_{13}+\\&+E_{21}g_{12}g_{11}+E_{22}g_{12}g_{12}+E_{23}g_{12}g_{13}+E_{31}g_{13}g_{11}+\\&+E_{32}g_{13}g_{12}+E_{33}g_{13}g_{13}+E_{44}g_{14}g_{14}+E_{55}g_{15}g_{15}+\\&+E_{66}g_{16}g_{16}=E_f\cos^4\Theta+E_t\sin^4\Theta+2E_{tf}\sin^2\Theta\cos^2\Theta+\\&+4G'\sin^2\Theta\cos^2\Theta=E_f\{\cos^4\Theta+p\sin^4\Theta+2[\nu p/(1+\nu)+\\&+2p/(1+p(1+2\nu'))]\sin^2\Theta\cos^2\Theta\};\end{aligned} \tag{8}$$

$$C^*_{22}=pE_f; \tag{9}$$

$$\begin{aligned}C^*_{33}=E_f\{&\sin^4\Theta+p\cos^4\Theta+2[\nu p/(1+\nu)+\\&+2p/(1+p(1+2\nu'))]\sin^2\Theta\cos^2\Theta\};\end{aligned} \tag{10}$$

$$C^*_{12}=E_{tf}\cos^2\Theta+E_{tf}\sin^2\Theta=\nu p/(1+\nu)E_f; \tag{11}$$

$$\begin{aligned}C^*_{13}=E_f\{&\nu p/(1+\nu)(\sin^4\Theta+\cos^4\Theta)+[1+p-\\&-4p/(1+p(1+2\nu'))]\sin^2\Theta\cos^2\Theta\};\end{aligned} \tag{12}$$

$$C^*_{23}=\nu p/(1+\nu)E_f. \tag{13}$$

Остальные коэффициенты равны или близки нулю.

Постоянные жесткости (8...13) получены в результате преобразования матрицы коэффициентов жесткости отдельного волокна, ориентированного под углом Θ относительно оси X нити. Геометрическая модель нити допускает, что волокна располагаются по винтовым линиям с постоянным шагом. Тогда, как отмечено, шаг винтовой линии h не зависит от текущего радиуса нити r, а угол ориентации отдельного волокна Θ, равный углу подъема винтовой линии, изменяется вдоль радиуса, достигая на поверхности нити радиуса R величины β. Модуль упругости нити E_x определяется жесткостью всех волокон, поэтому для расчета прочности нити необходимы усредненные характеристики C_{ij}, для чего делим нить на цилиндрические элементы радиальной толщины dr и площадью $2\pi r dr$ с углом винтовой линии Θ. Тогда среднее значение $\cos^4\Theta$ получим в результате интегрирования [2]:

$$\langle\cos^4\Theta\rangle = 1/(\pi R^2)\int_0^R 2\pi r\cos^4\Theta dr. \tag{14}$$

Интеграл можно упростить, введя вместо r новую переменную Θ, полагая, что

$$r = h\,\mathrm{tg}\Theta/(2\pi).$$

Отсюда

$$dr = 1/(2\pi)\,h/\cos^2\Theta d\Theta$$

и, кроме того,

$$2\pi R = h\,\mathrm{tg}\beta,\ 2\pi r = h\,\mathrm{tg}\Theta.$$

После приведения подынтегрального выражения к новой переменной и замены пределов в (14) имеем

$$\langle\cos^4\Theta\rangle = h^2/(2\pi^2R^2)\int_0^\beta \mathrm{tg}\Theta\cos^2\Theta d\Theta = \cos^2\beta. \tag{15}$$

Постоянные жесткости нити C^*_{il} обусловлены вкладом жесткости отдельного волокна, ориентированного под углом Θ относительно оси X нити. Аналогично находим усредненные значения тригонометрических функций, входящих в соотношения, определяющие величину жесткости нити C^*_{il}:

$$\langle\sin^4\Theta\rangle = 1/\ (\pi R^2)\int_0^R 2\pi r\sin^4\Theta dr = 1 + \cos^2\beta + 4\ln\cos\beta/\mathrm{tg}^2\beta. \tag{16}$$

$$\langle\sin^2\Theta\cos^2\Theta\rangle = 1/(\pi R^2)\int_0^R 2\pi r\sin^2\Theta\cos^2\Theta dr =$$
$$= -\cos^2\beta - 2\ln\cos\beta/\mathrm{tg}^2\beta. \tag{17}$$

После усреднения получим формулы для постоянных жесткости нити:

$$C_{11} = E_f\{p + (1+p)\cos^2\beta + 4\ln\cos\beta/\mathrm{tg}^2\beta -$$
$$- 2p[\nu/(1+\nu) + 2/(1+p(1+2\nu'))](\cos^2\beta + 2\ln\cos\beta/\mathrm{tg}^2\beta)\}; \tag{18}$$

$$C_{22} = pE_f; \tag{19}$$

$$C_{33} = E_f\{1 + (1+p)\cos^2\beta + 4\ln\cos\beta/\mathrm{tg}^2\beta -$$
$$- 2p[\nu/(1+\nu) + 2/(1+p(1+2\nu'))](\cos^2\beta +$$
$$+ 2\ln\cos\beta/\mathrm{tg}^2\beta)\}; \tag{20}$$

$$C_{12} = E_f\nu p/(1+\nu); \tag{21}$$

$$C_{13}=E_f\{\nu p(1+2\cos^2\beta+4\ln\cos\beta/\mathrm{tg}^2\beta)/$$
$$/(1+\nu)-[1+p-4p/(1+p(1+2\nu'))](\cos^2\beta+ \tag{22}$$
$$+2\ln\cos\beta)/\mathrm{tg}^2\beta)\};$$

$$C_{23}=E_f\nu p/(1+\nu). \tag{23}$$

Если известны элементы матрицы внутренней жесткости нити $[C_{il}]$, то можно найти модуль упругости нити и обозначить его через E_x. Для этого рассмотрим одноосное растяжение нити вдоль оси X. Уравнения равновесия в нашем случае принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_1&=C_{11}\varepsilon_1 C_{12}\varepsilon_2+\varepsilon_{13}\varepsilon_3,\\ O&=C_{12}\varepsilon_1+C_{22}\varepsilon_2+C_{23}\varepsilon_3,\\ O&=C_{13}\varepsilon_1+C_{23}\varepsilon_2+C_{33}\varepsilon_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Так как модуль упругости нити представляет собой коэффициент пропорциональности между напряжением $\sigma_1=\sigma_x$ и деформацией $\varepsilon_1=$ $=\varepsilon_x$, выразим деформации ε_2 и ε_3 через ε_1. После довольно громоздких подстановок и преобразований находим формулу для определения модуля упругости нити:

$$E_x=C_{11}-[(C^2{}_{12}C_{33}+C^2{}_{13}C_{22}-2C_{12}C_{13}C_{23})/(C_{22}C_{33}-C^2{}_{23})]. \tag{25}$$

Таким образом, получены необходимые для расчета прочности нити уравнения и формулы, основанные на теории упругости анизотропного тела, методах матричного исчисления и статистического усреднения. Методология проектирования [3] предполагает расчеты характеристик свойств волокон, включая продольный E_f и поперечный E_t модули упругости, коэффициенты Пуассона ν и ν'; параметров распределения Вейбулла по прочности волокон; средней прочности волокон с действительной длиной l по формуле $\overline{P}(l)=P_*(l_0/l)^{1/\alpha}\Gamma(1+1/\alpha)$, где P_*, α — параметры распределения Вейбулла по прочности волокон и $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера; коэффициента реализации средней прочности волокон по формуле $k=(\alpha e)^{-1/\alpha}/\Gamma(1+1/\alpha)$ и модуля упругости нити.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков В. П.*//Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1996, № 2. С. 9...13.

2. *Hearle J. W. S., Grosberg P., Backer S.* Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics, New-York, 1969.

3. *Скуланова Н. С.* О построении новой модели разрушения и расчете прочности пряжи//Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1994, № 1. С. 5...10.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 07.05.96.