

УДК 677.1.051

**ОБ АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ  
ПРОЦЕССА ТРЕПАНИЯ**

*А. Б. ЛАПШИН, Д. А. ЯНУШЕВСКИЙ, С. Е. МАЯНСКИЙ, Н. М. ВЕРИЖНИКОВА*

**(Костромской государственный технологический университет)**

Совершенствование трепального оборудования предполагает разработку адекватных математических моделей и определение обоснованных экспериментальных параметров процесса трепания [1..4].

Возникающие при этом погрешности могут быть трех видов: ошибки, обусловленные выбором модели собственно технологического процесса трепания [2..4]; погрешности функционирования измерительной аппаратуры [5, с. 233..242; 6, с. 216..228; 7, с. 86..97]; ошибки, связанные с выбором модели процесса измерения.

Обычно [2..4] погрешности третьего вида не принимаются во внимание при обработке результатов экспериментов (осциллограмм), хотя проблема учета суммарного воздействия ошибок второго и третьего видов существует при создании методических основ получения информации о реальных процессах [8, с. 220..233].

Нами анализируется качественная адекватность возможных математических моделей процесса измерения динамическим исследованиям трепания льносырца для уменьшения ошибок второго и третьего видов.

Условием устранения амплитудно-частотных погрешностей измерений датчиков является обязательность соответствия отношения частот собственных колебаний упругих элементов и возмущающей силы  $\lambda > 10$  [2..4]. Определение значения этого параметра зависит от принимаемой модели процесса измерения, что существенно влияет на величину погрешностей третьего вида. Кроме того, к ошибкам анализа, обусловленным выбором модели процесса измерений, добавляются статистические ошибки при использовании конечных реализаций [8, с. 221]. Таким образом, методика обработки осциллограмм процесса трепания значительно влияет на величину экспериментальной силы натяжения.

Отсюда следует важность выбора модели взаимодействия элементов измерительного устройства с обрабатываемым материалом. Проведем анализ основных свойств возможных математических моделей. Простейшей является модель осциллятора с одной степенью свободы при гармоническом силовом воздействии [5..7]. Дифференциальное уравнение движения такой системы имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $x$  — деформация упругого элемента;

$f_0 = F_0/m$  — отношение амплитуды вынуждающей силы  $F_0$  к массе  $m$  части датчика, совершающей колебания;

$\omega$  — частота вынуждающей силы;

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$  — собственная частота датчика;

$k$  — коэффициент квазиупругой силы;

$\beta = r/2m$  — коэффициент затухания;

$r$  — коэффициент сопротивления.

Решением (1) является функция

$$x(t) = (f_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}) \cos(\omega t - \arctg(2\beta\omega / (\omega_0^2 - \omega^2))), \quad (2)$$

где собственная частота  $\omega_0$  определяется фиксированными свойствами измерительных устройств и соответствует периоду  $\tau_1 = 2\pi/\omega_0$  (рис. 1).

Частота  $\omega$  соответствует периоду  $\tau_2 = 2\pi/\omega$ , то есть интервалу времени между ударами била по слою льносырца при трепании:

$$\omega = 2\pi k_1 k_2 n a / 60, \quad (3)$$

где  $k_1$  — число трепальных барабанов;

$k_2$  — число бил на барабане;

$n$  — частота вращения барабана,  $\text{мин}^{-1}$ ;  
 $\alpha$  — коэффициент, зависящий от совокупности режимных, конструктивных и технологических параметров.

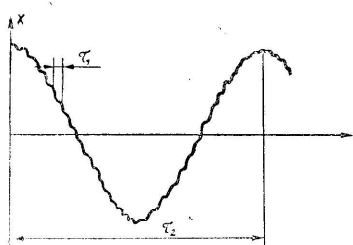


Рис. 1.

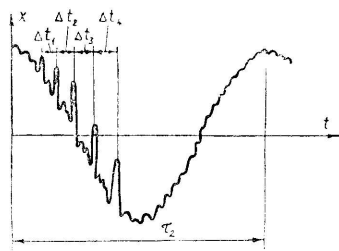


Рис. 2.

Обычно [2..4]  $\alpha$  принимают равным единице, хотя на реальных осциллограммах практически всегда присутствуют выделенные локальные пики (рис. 2). В данном случае за частоту вынуждающей силы в (1) следует принять  $\omega = 2\pi/\tau$ , где  $\tau = \min\{\Delta t_i\}$  (рис. 2), то есть  $\tau$  — минимальный интервал между выделенными пиками.

Происхождение последних характеризуется резонансными явлениями двух типов: при взаимодействии обрабатываемого материала с элементами измерительного устройства и обрабатываемого слоя льносырца с биллом трепального барабана. Обычно принимаются во внимание резонансы первого типа, однако установлено [9], что одной из причин скачкообразного изменения силы натяжения при трепании является образование перед бильными кромками скопления волокон и костры, существенно изменяющего условия и характер взаимодействия пряди с рабочими органами трепальных машин.

С учетом возможных резонансов второго типа совокупность локальных пиков (рис. 2) на осциллограммах должна интерпретироваться не как погрешность эксперимента, а как статистическая информация о существенно стохастическом характере процесса трепания.

Сама модель (1) вынужденных колебаний системы с сосредоточенной массой, строго говоря, не соответствует действительности, так как при динамических исследованиях процесса трепания в качестве упругих используются кольцевые элементы, то есть системы с распределенной массой. Модели колебаний последних подробно исследованы, например, в [10]. Частоты собственных колебаний стержня и кольца соответственно [10, с. 164]:

$$p_c = k^2 \pi^2 \sqrt{EJ/m_0 l^4}, \tag{4}$$

$$p_k = (k(k^2 - 1) / \sqrt{k^2 + 1}) \sqrt{EJ/m_0 R^4}, \tag{5}$$

где  $m_0$  — масса стержня (кольца);

$l$  — длина стержня;

$R$  — радиус кольца;

$EJ$  — жесткость при изгибе в плоскости колебаний.

В силу указанной существенной стохастичности процесса трепания наиболее адекватными являются модели, использующие теорию случайных функций [5, 8, 10..12]. Любую случайную функцию характеризуют неслучайными функциями — математическим ожиданием,

дисперсией и корреляционной функцией. Эти характеристики случайной функции можно найти только путем обработки результатов экспериментальных наблюдений.

Если стационарный случайный процесс является эргодическим, то при вычислении его статистических характеристик осреднение по реализациям можно заменить таковым по времени [10, с. 317]:

$$m = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \quad x_0(t) = x(t) - m;$$

$$k(\tau) = \frac{1}{T - \tau_0} \int_0^{T - \tau_0} x_0(t) x_0(t + \tau_0) dt; \quad D = k(0) =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T x_0^2(t) dt,$$

где  $t$  — время;

$x(t)$  — величина деформации упругого элемента на осциллограммах;

$m$  — математическое ожидание;

$D$  — дисперсия;

$k(\tau)$  — корреляционная функция;

$\tau_0$  — период осреднения;

$x_0(t)$  — центрированная случайная функция;

$T$  — интервал времени между ударами бил по слою льносырца.

Наряду с корреляционной функцией характеристикой стационарной случайной функции является ее спектральная функция  $S(\omega)$ . Полагая

$$S(\omega) = \begin{cases} D/\omega_c, & \text{если } 0 < \omega < \omega_c, \\ 0, & \text{если } \omega > \omega_c, \end{cases}$$

где  $\omega_c = 2\pi/\tau_c$  и  $\tau_c = \min\{\Delta t_i\}$  (рис. 2), получаем [10, с. 318]

$$k(\tau) = \int_0^{+\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{D}{\omega_c \tau_0} \sin \omega_c \tau_0.$$

Другие типы зависимостей  $S(\omega)$  и  $k(\tau)$  приведены ранее [8, с. 28].

## ВЫВОДЫ

1. К ошибкам анализа, обусловленным выбором модели процесса измерений, добавляются статистические ошибки вследствие использования конечных реализаций на осциллограммах процесса.

2. Выполнен анализ качественной адекватности математических моделей вынужденных колебаний при экспериментальных динамических исследованиях процесса трепания.

3. Приведена методика определения статистических характеристик по осциллограммам сил натяжения при трепании с использованием теории случайных функций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ипатов А. М.* Теоретические основы механической обработки стеблей лубяных культур. — М.: Легпромбытгиздат, 1989.

2. Янушевский Д. А. Исследование и обоснование некоторых конструктивных параметров для бильных барабанов льнотрепальных машин: Дис. ... канд. техн. наук. — Кострома, 1981.
3. Коновалов В. В. Разработка и исследование конструкции трепальных барабанов агрегата МТА — 1Л: Дис. ... канд. техн. наук. — Кострома, 1988.
4. Лапшин А. Б. Математическое моделирование процесса трепания для обоснования конструкции барабана с переменным числом бил: Дис. ... канд. техн. наук. — Кострома, 1994.
5. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. — М.: Машиностроение, 1976.
6. Магнус К. Колебания. — М.: Мир, 1982.
7. Мигулин В. В. и др. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1988.
8. Гусев А. С., Светлицкий В. А. Расчет конструкций при случайных воздействиях. — М.: Машиностроение, 1984.
9. Пашин Е. Л. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1993, № 6. С. 18. — 20.
10. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. — М.: Высшая школа, 1980.
11. Коненков Ю. К., Давтян М. Д. Случайные механические процессы в оборудовании машин. — М.: Машиностроение, 1988.
12. Макаров Б. П. Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. — М.: Машиностроение, 1983.

Рекомендована кафедрой теории механизмов и машин и проектирования текстильных машин. Поступила 23.11.95.

---