ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 3 (237) ТЕХНОЛОГИЯ ТЕКСТИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ 1997

УДК 677.026.442.2

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕКСТИЛЬНОГО МАТЕРИАЛА*

М. Ю. ТРЕЩАЛИН

(Московская государственная текстильная академия им. А. Н. Косыгина)

Широкое применение текстильных изделий в технике и быту создает разнообразие условий эксплуатации этих материалов.

Определялась зависимость, описывающая напряженно-деформированное состояние текстильного материала (иглопробивного нетканого материала), обусловленное внешними физико-механическими воздействиями на материал в процессе эксплуатации.

Поведение высокопористых сред, к которым относится рассматриваемый материал, с достаточной для практических расчетов точностью можно описать степенной зависимостью вида [1]:

$$P=f(\varepsilon)=K\varepsilon^{n}, \tag{1}$$

где P — приложенная нагрузка;
ε — объемная деформация;
K, n — параметры модели.

Очевидно, что для высокопористых материалов объемная деформация при низких нагрузках (до 1 МПа) в основном обусловлена сжимаемостью воздуха в порах. Такое допущение позволяет найти связь между объемной деформацией и пористостью (или плотностью) материала в нагруженном состоянии, то есть определить границы объемной деформации материала согласно требованиям, обусловленным его последующей эксплуатацией:

$$\varepsilon=(\xi_0-\xi)/(1-\xi),$$

где ξ_0, ξ — соответственно начальная и текущая пористость материала.

Отсюда следует, что по границам, в которых заключена пористость текстильного материала под нагрузкой, можно определить интервал изменения его объемной деформации.

Тогда, считая пористость $\xi_{\min}$, соответствующей объемной деформации $\varepsilon=a$ при $P=P_{\min}$, а $\xi_{\max}$, наблюдаемое в случае $\varepsilon=b$ при $P=$ $=P_{\min}$, находим рабочий диапазон изменения объемной деформации и пористости материала в пределах

$$\begin{cases} a\leqslant\varepsilon\leqslant b, \\ \xi_{\min}\leqslant\xi\leqslant\xi_{\max}. \end{cases} \tag{2}$$

Наша задача состоит в определении функции вида (1), обеспечивающей выполнение требований (2). Для этого воспользуемся методом

* В порядке обсуждения.

штрафных функций, выявление которых по объемной деформации производится так, чтобы в интересующем интервале (2) функция (1) равнялась нулю, а за пределами интервала возрастала:

$$f(\varepsilon)=\begin{cases}0, & a\leqslant\varepsilon\leqslant b,\\ [\varepsilon-b], & \varepsilon\geqslant b,\\ [a-\varepsilon], & \varepsilon\leqslant a.\end{cases}$$

С целью определения неизвестных K и n необходимо минимизировать разницу между искомой функцией (1), представляемой в виде

$$KZ^n=K\exp(n\ln(Z)),$$

и выбранной штрафной функцией $f(Z)$ в заданном интервале от 0 до A.

Для обеспечения положительной разности этих функций в каждой точке по Z используется стандартный прием возведения разности в квадрат (метод средних квадратичных отклонений);

$$\int_0^A[KZ^n-f(Z)]^2=I(K,n),$$

где $f(Z)$ — штрафная функция, выбранная из физических соображений (то есть в интересующем нас рабочем диапазоне, например, от a до b) $f(Z)=0$.

Запишем условие экстремума функции двух переменных в общем виде:

$$\frac{dI}{dK}=2\int_0^A[KZ^n-f(Z)]Z^n dZ=0, \tag{3}$$

$$\frac{dI}{dn}=2\int_0^A[KZ^n-f(Z)]KZ^n\ln(Z)dZ=0. \tag{4}$$

Условия (3) и (4) позволяют определить K и n. Из (3) при $A=1$ находим K:

$$\int_0^a[KZ^n-(a-Z)]Z^n dZ+\int_a^b KZ^n Z^n dZ+$$

$$+\int_b^1[KZ^n-(Z-b)Z^n dZ]=I_1+I_2+I_3=0, \tag{5}$$

где a, b — деформации материала соответственно при минимальном и максимальном давлениях.

Решение каждого из трех слагаемых в (5) имеет вид

$$I_1=\int_0^a[KZ^{2n}-(aZ^n-Z^{n+1})]dZ=\frac{Ka^{2n+1}}{2n+1}-\frac{a^{n+2}}{(n+1)(n+2)},$$

$$I_2=\int_b^a KZ^{2n}dZ=\frac{K}{2n+1}[b^{2n+1}-a^{2n+1}],$$

$$I_3=\int_b^1[KZ^n-(Z-b)Z^n dZ]=\frac{K}{2n+1}[1-b^{2n+1}]-$$

$$-\left[\frac{1}{n+2}(1-b^{n+2})-\frac{b}{n+1}(1-b^{n+1})\right].$$

Тогда

$$I_1+I_2+I_3=\frac{K}{2n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[a^{n+2}+\right.$$
$$\left.+n(1-b)+(1-2b)+b^{n+2}\right]=0. \qquad (6)$$

Из (4) определяем показатель степени n:

$$\int_0^a [KZ^n-(a-Z)]Z^n\ln(Z)dZ+\int_a^b KZ^nZ^n\times$$
$$\times\ln(Z)dZ+\int_b^1 [KZ^n-(Z-b)]Z^n\ln(Z)dZ=L_1+L_2+L_3=0. \qquad (7)$$

Аналогично предыдущему

$$L_1=K\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)^2}[(2n+1)\ln(a)-1]-$$
$$-a\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln(a-1)]+\frac{a^{n+2}}{(n+2)^2}\times$$
$$\times[(n+2)\ln(a)-1].$$

Второй интеграл в (7)

$$L_2=K\int_a^b Z^{2n}\ln(Z)dZ=\frac{K}{(2n+1)}[b^{2n+1}\ln(b)-$$
$$-a^{2n+1}\ln(a)-\frac{1}{(2n+1)}(b^{2n+1}-a^{2n+1})].$$

Для третьего слагаемого формулы (7)

$$L_3=\int_b^1 [KZ^{2n}\ln(Z)-(Z^{n+1}\ln(Z)-bZ^n\ln(Z)]dZ=$$
$$=\frac{K}{(2n+1)^2}[b^{2n+1}\{1-(2n+1)\ln(b)\}-1]-$$
$$-\frac{1}{(n+2)^2}[b^{n+2}\{1-(n+2)\ln(b)\}-1]+$$
$$+\frac{b}{(n+1)^2}[b^{n+1}\{1-(n+1)\ln(b)\}-1].$$

В результате (7) принимает вид

$$L_1+L_2+L_3=\frac{Ka^{2n+1}}{(2n+1)^2}[(2n+1)\ln(a)-1]-$$
$$-\frac{a^{n+2}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln(a)-1]+\frac{a^{n+1}}{(n+2)^2}[(n+2)\ln(a)-1]+$$
$$+\frac{K}{(2n+1)^2}\{(2n+1)[b^{2n+1}\ln(b)-a^{2n+1}\ln(a)]-$$
$$-(b^{2n+1}-a^{2n+1})\}+\frac{K}{(2n+1)^2}\{b^{2n+1}[1-(2n+1)\times$$
$$\times\ln(b)]-1\}-\frac{1}{(n+2)^2}\{b^{n+2}[1-(n+2)\ln(b)]-1\}+$$

$$+\frac{b}{(n+1)^2}\{b^{n+1}[1-(n+1)\ln(b)]-1\}=0. \quad (8)$$

После приведения подобных членов (8) записывается в виде

$$-\frac{K}{(2n+1)^2}+\left\{\frac{1}{(n+1)^2}\{b^{n+1}[1-(n+1)\ln(b)]-\right.$$
$$-b-a^{n+2}[(n+1)\ln(a)-1]\}+\frac{1}{(n+2)^2}\{a^{n+2}[(n+2)\times$$
$$\left.\times\ln(a)-1]-b^{n+2}[1-(n+2)\ln(b)]+1\}\right\}=0. \quad (9)$$

Поделив (6) почленно на $(2n+1)$, имеем

$$\frac{K}{(2n+1)^2}-\frac{1}{(2n+1)(n+1)(n+2)}[a^{n+2}+n(1-b)+$$
$$+(1-2b)+b^{n+2}]=0. \quad (10)$$

Складывая (9) и (10), находим трансцендентное уравнение для определения n:

$$\frac{1}{(n+1)^2}\{b^{n+2}[1-(n+1)\ln(b)]-b-a^{n+1}[(n+1)\ln(a)-1]\}+$$
$$+\frac{1}{(n+1)^2}\{a^{n+2}[(n+2)\ln(a)-1]-b^{n+2}[1-(n+2)\ln(b)]+1\}-$$
$$-\frac{1}{(2n+1)(n+1)(n+2)}[a^{n+2}+n(1-b)+(1-2b)+b^{n+2}=0. \quad (11)$$

Значения K определяются из уравнения

$$K=[(2n+1)/(n+1)(n+2)][a^{n+2}+n(1-b)+(1-2b)+b^{n+2}]. \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) решаются с учетом (1), записанного для максимального и минимального давлений:

$$\ln(P_{\max})=\ln(K)+n\ln(b), \quad (13)$$

$$\ln(P_{\min})=\ln(K)+n\ln(a). \quad (14)$$

Численные значения n, K, a и b находятся из совместного решения (11)...(14) при известных $P_{\max}$ и $P_{\min}$, получаемых из поля давлений на текстильный материал независимо от сферы его применения.

ВЫВОДЫ

Получены расчетные формулы, позволяющие определить напряженно-деформированное состояние текстильных материалов в зависимости от условий их последующей эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляхов Г. М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. — М.: Наука, 1982.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 09.01.97.