УДК 677.071:531:517.9

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГИБКОЙ НИТИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ЗАЖАТУЮ ПРЯДЬ, С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

COMPUTER SIMULATION OF A FLEXIBLE STRING, MODELING SANDWICHED STRAND, WITH THE CYLINDRICAL SURFACE WHEN AN EXTERNAL LOAD DISTRIBUTION

Н.И. КОВАЛЕНКО, С.Н. РАЗИН
N.I. KOVALENKO, S.N. RAZIN

(Костромской государственный технологический университет)
(Kostroma State Technological University)
E-mail: info@ kstu.edu.ru

В работе получено дифференциальное уравнение, описывающее изменение силы натяжения нити, лежащей на поверхности произвольной формы, в зависимости от дуговой координаты при действии на нее произвольной внешней распределенной нагрузки.

In this work the differential equation describing the change in the strength thread tension, lying on the surface of arbitrary shape depending on the arc coordinates the action of her arbitrary external distributed load.

Ключевые слова: зажимной механизм, гибкая нить, моделирование, силы зажима.

Keywords: clamping mechanism, flexible string, modeling, clamping force.

Механикой нити занимались многие ученые. В основном эти работы посвящены вопросам статики и динамики либо свободной нити, либо взаимодействующей с шероховатой поверхностью, когда на нить наложена односторонняя связь [1], [2].

Возможен случай взаимодействия нити с шероховатым телом, когда она прижата к нему другим телом. Подобная схема взаимодействия нити с шероховатым телом возникает, например, при трепании слоя льнотресты в трепальной машине МТА-2Л. На рис.1 изображено сечение ремней транспортирующего механизма этой машины. Слой III огибает поверхность нижнего ремня II, а сверху слой прижимается верхним ремнем I. Линия контакта ремней S_i может иметь любой профиль.

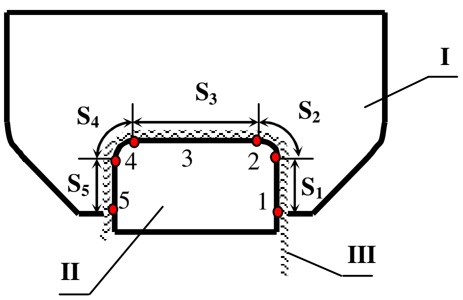

Рис. 1

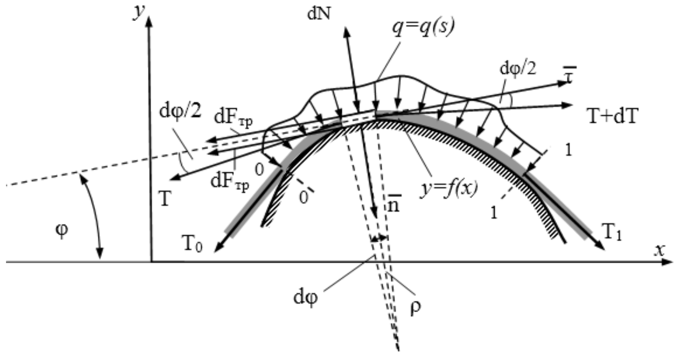

Рис. 2

Пусть, например, слой зажат между двумя шероховатыми поверхностями, профиль которых описывается уравнением $y = f(x)$, рис. 2 (схема сил, действующих на элементарный участок слоя волокна, лежащего на поверхности цилиндра произвольной формы, при наличии внешней распределенной нагрузки). На рисунке вторая поверхность отсутствует, а ее действие изображено в виде распределенной нагрузки $q = q(s)$. Решаем задачу при следующих допущениях. Будем считать слой в любом сечении ремней по длине транспортирующей секции равномерным по толщине и плотности, тонким, несминаемым и нерастяжимым. Кроме того, будем пренебрегать весом слоя, вследствие его относительной малости, а также будем считать поверхности ремней недеформируемыми. При сделанных допущениях слой волокон можно считать тканью. Согласно положениям механики нити [1] простейшая теоретическая модель ткани представляет собой идеально гибкую материальную поверхность, имеющую нулевую толщину и нулевую жесткость при деформации изгиба. Выделив в слое полоску шириной 1 см, рассмотрим силы, действующие на нее. Поскольку волокна слоя в выделенной полоске находятся примерно в одинаковых условиях (различия заключаются в том, что по длине ремня нагрузка на него со стороны роликов, а также нагрузка на обрабатываемый слой со стороны бильных планок изменяется), то будем считать выделенную полоску слоя – нитью – предельный образ тела, поперечными размерами которого можно пренебречь. Выделим бесконечно малый участок нити и укажем силы, действующие на данном участке. Записываем уравнения равновесия в проекциях на координатные оси:

$$\sum F_x = (T + dT)\cos(\phi - \frac{d\phi}{2}) - T\cos(\phi + \frac{d\phi}{2}) - dF_{тр1}\cos\phi - dN\sin\phi - dF_{тр2}\cos\phi + dQ\sin\phi = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_y = (T + dT)\sin(\phi - \frac{d\phi}{2}) - T\sin(\phi + \frac{d\phi}{2}) - dF_{тр1}\sin\phi + dN\cos\phi - dF_{тр2}\sin\phi - dQ\cos\phi = 0, \quad (2)$$

где T – сила натяжения в ведомой ветви нити; $T + dT$ – сила натяжения в ведущей ветви нити; f – коэффициент трения слоя о поверхность ремня; dN – равнодействующая сил реакции цилиндра на выделенный участок нити; $dF_{тр1}$ – элементарная сила трения выделенного участка о поверхность нижнего ремня; $dF_{тр2}$ – элементарная сила трения выделенного участка о поверхность верхнего ремня; dQ – сила давления верхнего ремня на выделенный участок нити; ϕ – угол наклона касательной к кривой $y = f(x)$.

$$dF_{тр1} = fdN;\ dF_{тр2} = fdQ;$$
$$dQ = q(s)ds = q(s)\rho d\phi,$$

где $q(s)$ – интенсивность распределенной нагрузки; ds – элементарный участок нити; s – дуговая координата; ρ – радиус кривизны. Учитывая, что:

$$\cos(\phi \pm \frac{d\phi}{2}) = \cos\phi \cdot \cos\frac{d\phi}{2} \mp \sin\phi \cdot \sin\frac{d\phi}{2} \approx \cos\phi \mp \frac{d\phi}{2}\sin\phi,$$
$$\sin(\phi \pm \frac{d\phi}{2}) = \sin\phi \cdot \cos\frac{d\phi}{2} \pm \cos\phi \cdot \sin\frac{d\phi}{2} \approx \sin\phi \pm \frac{d\phi}{2}\cos\phi.$$

Тогда в результате несложных преобразований первые два слагаемые в уравнениях (1) и (2) можно записать в виде:

$$(T + dT)\cos(\phi - \frac{d\phi}{2}) - T\cos(\phi + \frac{d\phi}{2}) = T\sin\phi d\phi + dT\cos\phi, \tag{3}$$
$$(T + dT)\sin(\phi - \frac{d\phi}{2}) - T\sin(\phi + \frac{d\phi}{2}) = dT\sin\phi + T\cos\phi d\phi. \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в (1) и (2), получим:

$$\begin{cases} Td\phi\sin\phi + dT\cos\phi - fdN\cos\phi - dN\sin\phi - fdQ\cos\phi + dQ\sin\phi = 0, \\ -Td\phi\cos\phi + dT\sin\phi - fdN\sin\phi + dN\cos\phi - fdQ\sin\phi - dQ\cos\phi = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Умножив обе части первого уравнения системы на $\cos\phi$, обе части второго уравнения – на $\sin\phi$, сложив получившиеся уравнения и приведя подобные члены, получим:

$$dT - fdN - fdQ = 0,$$
$$dN = \frac{dT - fdQ}{f}. \tag{6}$$

Подставив (6) в (5), получим:

$$Td\phi\sin\phi + dT\cos\phi - (dT - fdQ)\cos\phi + \frac{dT - fdQ}{f}\sin\phi - fdQ\cos\phi + dQ\sin\phi = 0.$$

Или:

$$Td\phi\sin\phi + dT\cos\phi - dT\cos\phi + fdQ\cos\phi - \frac{dT}{f}\sin\phi - fdQ\cos\phi + dQ\sin\phi + dQ\sin\phi = 0.$$

После приведения подобных членов уравнение примет вид:

$$T\sin\phi d\phi - \frac{dT}{f}\sin\phi + 2dQ\sin\phi = 0 .$$

Так как

$$dQ = q(s)ds = q(s)\rho d\phi ,$$

где $\rho = \rho(s)$ – радиус кривизны линии сопряжения в точке с координатой s, то

$$Td\phi - \frac{dT}{f} + 2q(s)\rho d\phi = 0 ,$$

или

$$dT = f[T + 2q(s)\rho]d\phi .$$

Тогда

$$\frac{dT}{d\phi} - fT = 2q(s)\rho f . \qquad (7)$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение, описывающее изменение силы натяжения в зависимости от дуговой координаты. Решение уравнения в общем случае невозможно, поскольку для этого необходимо задать конкретный вид профиля кривой.

Рассмотрим частный случай решения этого уравнения. Если в формуле (7) $\rho = \text{const}$, то это соответствует случаю, когда поверхность сопряжения является цилиндрической с радиусом R.

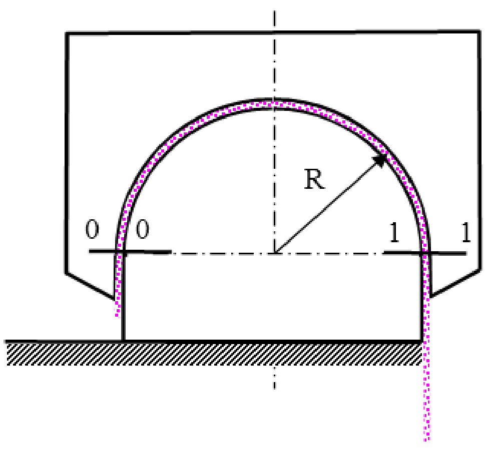

Рис. 3

В этом случае $\rho = R = \text{const}$. Это имеет место, как отмечалось выше, при взаимодействии слоя льна с поверхностями ремней зажимного механизма в процессе трепания на участках 2 и 4 (рис. 1), или в случае, если слой зажат между поверхностями, показанными на рис. 3 (возможный профиль сечения поверхностей, взаимодействующих с нитью).

Учитывая, что $ds = Rd\varphi$, уравнение (7) примет вид:

$$\frac{dT}{ds} - \frac{J}{R}T = 2fq(s) . \qquad (8)$$

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением. Его общее решение имеет вид:

$$T = e^{\int_0^s \frac{f}{R}ds}\left(\int_0^s 2fq(s)e^{-\int_0^s \frac{f}{R}ds}ds + C\right). \qquad (9)$$

Постоянную интегрирования найдем из условия: при s = 0 T = T_0, где T_0 – сила натяжения слоя в ведомой ветви (в сечении 0-0) (рис. 2). Тогда C = T_0 и решение (9) примет вид:

$$T = e^{\frac{f}{R}s}\left(\int_0^s 2fq(s)e^{-\frac{f}{R}s}ds + T_0\right). \qquad (10)$$

По формуле (10) можно определить предельную силу натяжения пряди в любом сечении. Например, для рис. 3 в сечении 1-1 сила натяжения определится по формуле:

$$T = e^{f\pi}\left(\int_0^{f\pi} 2fq(s)e^{-\frac{f}{R}s}ds + T_0\right).$$

В Ы В О Д Ы

1. Получено дифференциальное уравнение, описывающее изменение силы натяжения нити, лежащей на поверхности произвольной формы, в зависимости от дуговой координаты при действии на нее

произвольной внешней распределенной нагрузки.

2. Получено аналитическое решение этого уравнения для случая взаимодействия нити с цилиндрической круговой поверхностью при действии на нее произвольной внешней распределенной нагрузки.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мигушов И.И.* Механика текстильной нити и ткани. – М.: Легкая индустрия,1980.

2. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити. – М.: МГТУ, 2001.

R E F E R E N C E S

1. Migushov I.I. Mehanika tekstil'noj niti i tkani. – M.: Legkaya industriya,1980.

2. Werbakov V.P. Prikladnaya mehanika niti. – M.: MGTU, 2001.

Рекомендована кафедрой инженерной графики, теоретической и прикладной механики. Поступила 12.11.14.