

УДК 677.61

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ТРЕХВАЛКОВОГО МОДУЛЯ**

В. А. МАРТЫШЕНКО, А. В. ПОДЪЯЧЕВ

(Костромской государственной технологической университет)

Предлагаемая модель распространяется на трехвалковые модули с валами произвольной конструкции. С целью расчета модуля его делят на элементы, в пределах длины которых жесткости постоянны. Эти элементы могут принадлежать верхнему, среднему или нижнему валу, а также включать и верхний, и средний, и нижний вал с нелинейно-упругими прослойками между ними. Для сложной механической системы, каковой является трехвалковый модуль, составляется уравнение состояния изгиба. Уравнение состояния изгиба для участков валов, не контактирующих через упругое основание, было получено и использовано ранее [1, 2].

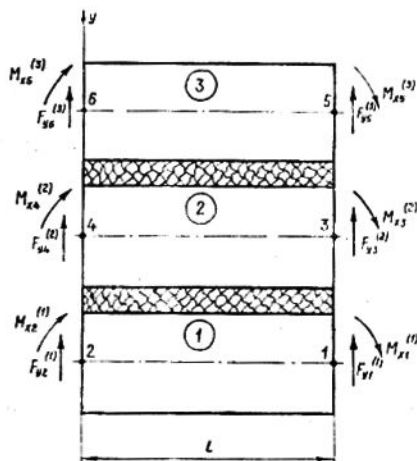


Рис. 1.

Модель элемента для трехвалкового модуля, оси валов которых расположены в одной плоскости, приведена на рис. 1. Деформация элементов описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} EJ_1 V_1^{IV} + x_1 (V_1 - V_2) = 0, \\ EJ_2 V_2^{IV} + x_1 (V_2 - V_1) + x_2 (V_2 - V_3) = 0, \\ EJ_3 V_3^{IV} + x_2 (V_3 - V_2) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где EJ_1, EJ_2, EJ_3 — изгибные жесткости валов 1, 2 и 3;
 V_1, V_2, V_3 — прогибы валов;
 x_1, x_2 — коэффициенты упругости оснований.

Решение системы (1) ищем в виде: $V_1 = A \exp(\alpha z + i\beta z)$;

$$V_2 = B \exp(\alpha z + i\beta z); \quad V_3 = C \exp(\alpha z + i\beta z). \quad (2)$$

На рис. 1 изображены положительные узловые силовые факторы элемента с узлами 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Считая узловые перемещения в направлении положительных узловых силовых факторов положительными, получаем решение системы (1) в виде:

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 \sin k_1 z \operatorname{sh} k_1 z + A_2 \sin k_1 z \operatorname{ch} k_1 z + \\ &+ A_3 \cos k_1 z \operatorname{sh} k_1 z + A_4 \cos k_1 z \operatorname{ch} k_1 z + \\ &+ A_5 \sin k_2 z \operatorname{sh} k_2 z + A_6 \sin k_2 z \operatorname{ch} k_2 z + \\ &+ A_7 \cos k_2 z \operatorname{sh} k_2 z + A_8 \cos k_2 z \operatorname{ch} k_2 z + \\ &+ A_9 z^3 + A_{10} z^2 + A_{11} z + A_{12}; \\ V_2 &= (1 - 4i_1 k_1^4 / x_1) (A_1 \sin k_1 z \operatorname{sh} k_1 z + A_2 \sin k_1 z \operatorname{ch} k_1 z + \\ &+ A_3 \cos k_1 z \operatorname{sh} k_1 z + A_4 \cos k_1 z \operatorname{ch} k_1 z) + (1 - 4i_1 k_2^4 / x_1) \times \\ &\times (A_5 \sin k_2 z \operatorname{sh} k_2 z + A_6 \sin k_2 z \operatorname{ch} k_2 z + A_7 \cos k_2 z \operatorname{sh} k_2 z + \\ &+ A_8 \cos k_2 z \operatorname{ch} k_2 z) + A_9 z^3 + A_{10} z^2 + A_{11} z + A_{12}; \\ V_3 &= [1 - 4k_1^4 (i_1 / x_1 + (i_1 + i_2) / x_2) + 16k_1^8 i_1 i_2 / (x_1 x_2)] \times \\ &\times (A_1 \sin k_1 z \operatorname{sh} k_1 z + A_2 \sin k_1 z \operatorname{ch} k_1 z + A_3 \cos k_1 z \times \\ &\times \operatorname{sh} k_1 z + A_4 \cos k_1 z \operatorname{ch} k_1 z) + [1 - 4k_2^4 (i_1 / x_1 + \\ &+ (i_1 + i_2) / x_2) + 16k_2^8 i_1 i_2 / (x_1 x_2)] (A_5 \sin k_2 z \times \\ &\times \operatorname{sh} k_2 z + A_6 \sin k_2 z \operatorname{ch} k_2 z + A_7 \cos k_2 z \operatorname{sh} k_2 z + \\ &+ A_8 \cos k_2 z \operatorname{ch} k_2 z) + A_9 z^3 + A_{10} z^2 + A_{11} z + A_{12}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} k_{1,2}^4 &= [x_1 (i_1 + i_2) / (i_1 i_2) + x_2 (i_2 + i_3) / (i_2 i_3)] / 8 \pm \\ &\pm \{ \sqrt{[x_1 (i_1 + i_2) / (i_1 i_2) - x_2 (i_2 + i_3) / (i_2 i_3)]^2 + 4x_1 x_2 / (i_2^2)} \} / 8; \\ i_1 &= EJ_1; \quad i_2 = EJ_2; \quad i_3 = EJ_3. \end{aligned}$$

Последовательно подчиняя выражения (3) крайним кинематическим и статическим условиям, получаем систему двух матричных уравнений:

$$\begin{cases} V = BA, \\ F = CA, \end{cases} \quad (4)$$

где $V = [V_1^{(1)}, \Phi_1^{(1)}, V_2^{(1)}, \Phi_2^{(1)}, V_3^{(2)}, \Phi_3^{(2)}, V_4^{(2)}, \Phi_4^{(2)}, V_5^{(3)}, \Phi_5^{(3)}, V_6^{(3)}, \Phi_6^{(3)}]^T$ — вектор узловых линейных и угловых перемещений; $F = [F_{y1}^{(1)}, M_{x1}^{(1)}, F_{y2}^{(1)}, M_{x2}^{(1)}, F_{y3}^{(2)}, M_{x3}^{(2)}, F_{y4}^{(2)}, M_{x4}^{(2)}, F_{y5}^{(3)}, M_{x5}^{(3)}, F_{y6}^{(3)}, M_{x6}^{(3)}]^T$ — вектор узловых силовых факторов; $A = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}]^T$ — вектор постоянных интегрирования; B и C — квадратные матрицы двенадцатого порядка, элементы которых описываются гиперболо-тригонометрическими и степенными функциями.

Совместное решение (4) приводит к исключению вектора постоянных интегрирования и получению уравнения состояния изгиба трехвалкового элемента, связывающего узловые силовые факторы и узловые перемещения,

$$F = DV, \tag{5}$$

где $D = CB^{-1}$.

Уравнения состояния изгиба для отдельных элементов объединяем в уравнение состояния изгиба системы в целом с помощью топологического описания конструкций валов, учитывающего способы соединения элементов между собой. Решение уравнения состояния изгиба системы позволяет определить удельные нагрузки в жалах валов [3], внутренние усилия, перемещения и напряжения в произвольном сечении трехвалкового модуля.

Элемент трехвалкового модуля, оси которого расположены симметрично, но не в одной плоскости, представлен на рис. 2.

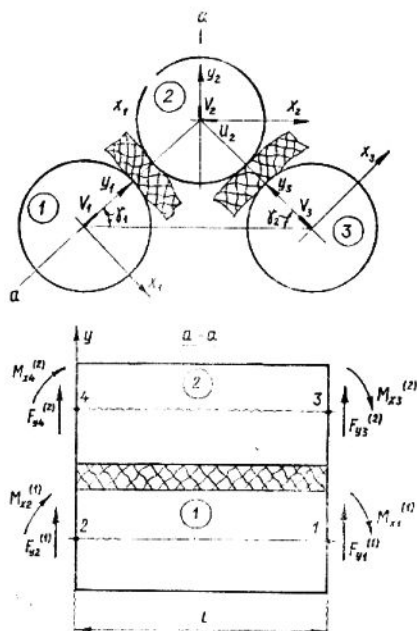


Рис. 2.

Направления линейных перемещений и узловых сил совпадают с направлениями осей соответственно y_1 , y_2 и y_3 , а изгибающие моменты действуют соответственно в плоскостях этих осей и оси z .

Совместная деформация изгиба валов описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} EJ_1 V_1^{IV} + x_1 (V_1 - V_2 \sin \gamma_1 + U_2 \cos \gamma_1) &= 0, \\ EJ_2 V_2^{IV} + x_1 (V_2 \sin \gamma_1 - V_1 - U_2 \cos \gamma_1) \sin \gamma_1 + \\ + x_3 (V_2 \sin \gamma_3 - V_3 + U_2 \cos \gamma_3) \sin \gamma_3 &= 0, \\ EJ_2 U_2^{IV} - x_1 (V_2 \sin \gamma_1 - U_2 \cos \gamma_1 - V_1) \cos \gamma_1 + \\ + x_3 (V_2 \sin \gamma_3 + U_2 \cos \gamma_3 - V_3) \cos \gamma_3 &= 0, \\ EJ_3 V_3^{IV} + x_3 (V_3 - V_2 \sin \gamma_3 - U_2 \cos \gamma_3) &= 0. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

При $x_1 = x_3 = x$; $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma$; $J_1 = J_3$; $|V_1| = |V_3|$ и $U_2 = 0$ решение (6) примет вид:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= A_1 \operatorname{sinkzshkz} + A_2 \operatorname{sinkzchkz} + A_3 \operatorname{coskzshkz} + \\
 &\quad + A_4 \operatorname{coskzchkz} + A_5 z^3 + A_6 z^2 + A_7 z + A_8; \\
 V_2 &= -2is(A_1 \operatorname{sinkzshkz} + A_2 \operatorname{sinkzchkz} + \\
 &\quad + A_3 \operatorname{coskzshkz} + A_4 \operatorname{coskzchkz}) + s^{-1}(A_5 z^3 + A_6 z^2 + A_7 z + A_8),
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

где $i = J_1/J_2$; $s = \sin \gamma$; $k^4 = x(1 + 2s^2i)/4EJ_1$.

Последующие действия аналогичны рассмотренным выше для плоской системы.

ВЫВОДЫ

Разработана универсальная математическая модель расчета на изгиб сложной механической системы, представляющей собой трехвалковый модуль произвольного конструктивного оформления с изменением жесткостных параметров по длине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартышенко В. А. // Изв. вузов. Строительство и архитектура. — 1979. № 12.
2. Подъячев А. В. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1987. № 4.
3. Мартышенко В. А., Подъячев А. В. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1988. № 3.

Рекомендована кафедрой сопротивления материалов. Поступила 29.10.96.