

УДК [677.021.17 : 533.6] : 519.711

**О МОДЕЛИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Г. Г. КАДАМЦЕВА, В. Н. НУЖДИН, Ф. Н. ЯСИНСКИЙ

(Ивановский государственный энергетический университет)

Ряд технологических процессов, имеющих фундаментальное значение в текстильном производстве, описывается системами, содержащими уравнения тепломассопереноса.

Таковыми являются: обработка пряжи паром, сушка, диффузия красителя в волокно и нить, промывка, перемешивание волокон в пневмопрядении и др. [1].

Уравнение переноса имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \nabla C = \text{div} (D \text{ grad } C) + F, \quad (1)$$

где t — время;

C — концентрация переносимой субстанции или температура, если изучается распространение тепла;

\vec{u} — вектор скорости среды;

D — коэффициент диффузии;

F — источниковый член.

При попытке математического моделирования процессов, содержащих в своем описании уравнения (1), возникают трудности в вычислении, состоящие, в основном, в больших затратах машинного времени.

Выход заключается в применении высокопроизводительной вычислительной техники, использующей принцип параллелизма, когда вычисления выполняются множеством процессоров, работающих одновременно.

Ниже предлагается методика интегрирования (1), удобная для распараллеливания вычислений. Для иллюстрации перепишем (1) в декартовых координатах, ограничиваясь двумерным случаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u_1 \frac{\partial C}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial C}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(D \frac{\partial C}{\partial x_1} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(D \frac{\partial C}{\partial x_2} \right) + F. \end{aligned} \quad (2)$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} = \left(\frac{\partial D}{\partial x_1} - u_1 \right) \frac{\partial C}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial D}{\partial x_2} - u_2 \right) \frac{\partial C}{\partial x_2} + \\ + D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} \right) + F. \end{aligned} \quad (3)$$

Разностная реализация (3) на прямоугольной сетке с шагами h_1, h_2 по

осям x_1, x_2 соответственно и шагом τ по времени при применении способа переменных направлений будет выглядеть [2]:

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^{k+1/2} - C_{ij}^k}{\tau/2} = & \left(\frac{D_{i+1j}^k - D_{i-1j}^k}{2h_1} - u_{1ij}^k \right) \frac{C_{i+1j}^{k+1/2} - C_{i-1j}^{k+1/2}}{2h_1} + \\ & + D_{ij}^k \frac{C_{i+1j}^{k+1/2} - 2C_{ij}^{k+1/2} + C_{i-1j}^{k+1/2}}{h_1^2} + \\ & + \left(\frac{D_{ij+1}^k - D_{ij-1}^k}{2h_2} - u_{2ij}^k \right) \frac{C_{ij+1}^k - C_{ij-1}^k}{2h_2} + \\ & + D_{ij}^k \frac{C_{ij+1}^k - 2C_{ij}^k + C_{ij-1}^k}{h_2^2} + F_{ij}^k, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^{k+1} - C_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = & \left(\frac{D_{i+1j}^k - D_{i-1j}^k}{2h_1} - u_{1ij}^k \right) \frac{C_{i+1j}^{k+1/2} - C_{i-1j}^{k+1/2}}{2h_1} + \\ & + D_{ij}^k \frac{C_{i+1j}^{k+1/2} - 2C_{ij}^{k+1/2} + C_{i-1j}^{k+1/2}}{h_1^2} + \\ & + \left(\frac{D_{ij+1}^k - D_{ij-1}^k}{2h_2} - u_{2ij}^k \right) \frac{C_{ij+1}^{k+1} - C_{ij-1}^{k+1}}{2h_2} + \\ & + D_{ij}^k \frac{C_{ij+1}^{k+1} - 2C_{ij}^{k+1} + C_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} + F_{ij}^{k+1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

После очевидных преобразований (4) и (5) приводим к виду

$$-\tilde{L}_{ij}^k C_{i-1j}^{k+1/2} + \tilde{\beta}_{ij}^k C_{ij}^{k+1/2} - \tilde{\gamma}_{ij}^k C_{i+1j}^{k+1/2} = \tilde{Q}_{ij}^k \quad (6)$$

$$-\hat{L}_{ij}^k C_{ij-1}^{k+1} + \hat{\beta}_{ij}^k C_{ij}^{k+1} - \hat{\gamma}_{ij}^k C_{i+1j}^{k+1} = \hat{Q}_{ij}^k \quad (7)$$

В (4..7) нижние индексы (i, j) соответствуют нумерации узлов по осям x, y , а верхний — номеру момента времени.

Узлы i, j пробегают значения для внутренних узлов области, в которой изучается процесс. При традиционном подходе сначала решается (6), для чего выполняется скалярная прогонка по x для всех внутренних j рядов. Полученные $C_{ij}^{k+1/2}$ являются исходными для (7). Далее прогонка выполняется по y для всех i столбцов. Получают C_{ij}^{k+1} . На следующем шаге эти операции повторяются.

Нами рекомендуется при решении (6), (7) вместо прогонки использовать численно-символьный метод. Чтобы показать сущность, продемонстрируем его на случае одномерного уравнения теплопроводности. Тогда (6) представим в виде

$$T_i^{k+1} = AT_i^k + B(T_{i-1}^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}), \quad (8)$$

$$A = 1/(1+2r); B = rA; r = D\tau/h^2, \quad (9)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$;

n — число узлов на оси x , i — номер узла.

Выделив из сетки, например, четыре узла, (8) можно переписать для i от S до $S+3$. Узлы с $i=S-1$ и $i=S+4$ станут граничными и получившуюся систему можно изобразить в виде ориентированного графа (рис. 1).

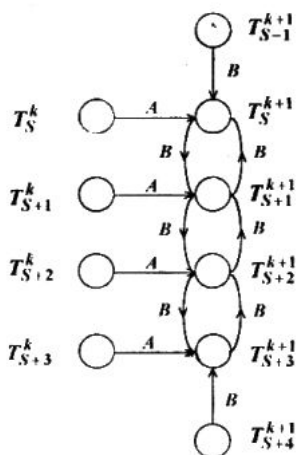


Рис. 1.

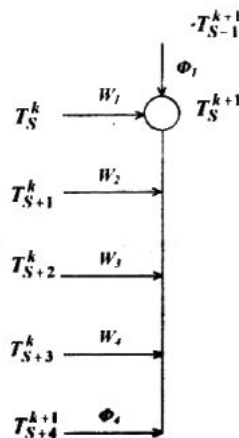


Рис. 2.

С помощью правила Мейсона [3] этот граф преобразуем в дерево вычисления сигнала T_S^{k+1} в $k+1$ момент (рис. 2).

После преобразований получим

$$T_S^{k+1} = T_S^k W_1 + T_{S+1}^k W_2 + T_{S+2}^k W_3 + T_{S+3}^k W_4 + T_{S-1}^{k+1} \Phi_1 + T_{S+4}^{k+1} \Phi_4. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= B(1-2B^2)/\Delta_1, W_1 = A(1-2B^2)/\Delta_1, \\ W_2 &= AB(1-B^2)/\Delta_1, W_3 = AB^2/\Delta_1, \\ W_4 &= AB^3/\Delta_1, \Phi_4 = B^4/\Delta_1. \end{aligned}$$

После нахождения T_S^{k+1} граф (рис. 1) принимает укороченный вид (рис. 3). Ему соответствует дерево (рис. 4).

Аналогично предыдущему находим

$$\begin{aligned} T_{S+1}^{k+1} &= T_{S+1}^k W_{22} + T_{S+2}^k W_{23} + \\ &+ T_{S+3}^k W_{23} + T_S^{k+1} \Phi_{21} + T_{S+4}^{k+1} \Phi_{24}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= B(1-B^2)/\Delta_2, W_{22} = A(1-B^2)/\Delta_2, \\ \Delta_{23} &= AB/\Delta_2, W_{24} = AB^2/\Delta_2, \end{aligned}$$

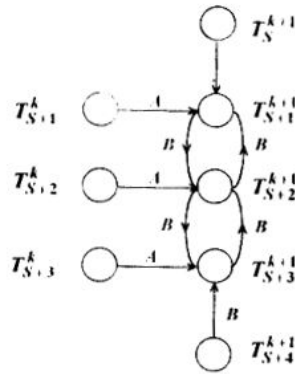


Рис. 3.

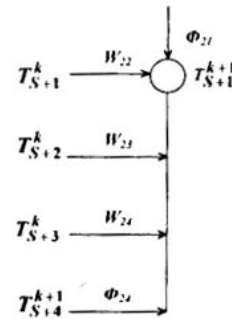


Рис. 4.

$$\Phi_{24} = B^4/\Delta_2, \Delta_2 = 1 - 2B^2.$$

На следующем шаге вычисляется T_{S+2}^{k+1} . Узел $S+1$ удаляется. Соответственно сокращается число коэффициентов W

$$\begin{aligned} T_{S+2}^{k+1} &= T_{S+2}^k W_{32} + T_{S+3}^k W_{34} + \\ &+ T_{S+4}^{k+1} \Phi_{34} + T_{S+4}^{k+1} \Phi_{24} + T_{S+1}^{k+1} \Phi_{34}, \\ \Phi_{31} &= B/\Delta_3, W_{33} = A/\Delta_3, \\ \Delta_{34} &= AB/\Delta_3, \Phi_{34} = B^2/\Delta_3, \Delta_3 = 1 - B^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Окончательно для последнего внутреннего узла $S+3$ получим

$$T_{S+3}^{k+1} = T_{S+2}^{k+1} B + T_{S+3}^k A + T_{S+4}^k B. \quad (13)$$

Подсчет числа операций и численные эксперименты показывают, что при $n < 10$ численно-символьный метод требует меньших затрат машинного времени, чем метод прогонки. Это нужно учитывать при распределении узлов по процессорам.

В численном эксперименте были испытаны следующие способы распараллеливания.

1. Способ с контактными узлами.

Координатные узлы на оси x распределяются по порядку между имеющимися p процессорами. Каждый процессор вычисляет T_i^{k+1} во внутренних узлах, попавших в его зону действия. На границе каждой двух соприкасающихся зон выделяется по контактному узлу, в которых искомая сеточная функция вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} T_i^{k+1} &= (1 - \xi) (T_{i+r_1}^k (T_{i+m}^k - 2T_i^k + T_{i-m}^k)) + \\ &+ \frac{\xi (T_{i+r_1}^k (T_{i+m}^k + T_{i-m}^k))}{1 + 2r_1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь ξ — параметр ($0 \leq \xi \leq 1$), $r = D\tau / (mh)^2$.

Очевидно, узлы $i-m$ и $i+m$ лежат в зонах действия различных процессоров, поэтому одна из температур T_{i+m}^k или T_{i-m}^k должна пересылаться. Параметр ξ назначается. При $\xi = 0$ получаем явную схему. При $\xi = 1$ известное полунейвное приближение В. И. Головичева. Наи-

лучшее значение для $\xi = 1/2 + \varepsilon$, где ε — малая положительная величина. В этом случае обеспечивается высокая точность и достаточная устойчивость счета. Каждый новый шаг по времени начинается с шага в контактных узлах. Затем запускается вычислительный процесс (прогонка или описанный символьный алгоритм) в каждом из процессоров. Следующий шаг опять начинается в контактных узлах.

Отметим, что в этих узлах берется увеличенный пространственный шаг, равный (mh) , вместо h , где обычно $m=2$ или 3 , что увеличивает устойчивость вычислительного процесса на стыках.

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. При использовании для контактных узлов явной схемы ($\xi=0$) неустойчивость наступает не при $\tau D/(mh)^2 = 1/2$, как можно было ожидать, а при значительно больших шагах по времени, что объясняется «стабилизирующим влиянием» окружающих узлов, в которых работает неявная схема.

II. Способ с перекрытием областей.

Соседние области, обслуживаемые различными процессорами, делаются частично перекрывающимися. Берется перекрытие в два узла, то есть имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} (T^{h+1}_{N-1})_p &= (T_1^{h+1})_{p+1}, \\ (T_N^{h+1})_p &= (T_2^{h+1})_{p+1}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Таким образом, на границе между двумя процессорами с номерами p и $p+1$ выполняется неразрывность производной $\frac{\partial T}{\partial x}$ и сохраняется тепловой поток

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (16)$$

\tilde{N} — номер последнего узла из зоны действия процессора номер p .

Алгоритмически выполнение (15) достигается тем, что при параллельных вычислениях выполняются пересылки

$$\left. \begin{aligned} (T_{N-1}^{m+1})_p &\rightarrow (T_1^{m+1})_{p+1}, \\ (T_N^{m+1})_p &\leftarrow (T_2^{m+1})_{p+1}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

III. Иерархические вложенные сетки.

Предположив, что процессы большего масштаба доминируют над мелкомасштабными, можно прибегнуть к следующему распараллеливанию. Вводится грубая сетка, каждый шаг которой равен l шагам данной. Уравнение интегрируется сначала на грубой сетке. Если шаг грубой сетки все еще достаточно мал и обеспечивает удовлетворительную точность, то полученные значения T_{jt}^{h+1} искомой функции в узлах грубой сетки используются в качестве граничных для интегрирования на \hat{N} образовавшихся интервалах уже на мелкой сетке. В результате определяются T_i^{h+1} уже во всех узлах. На следующем шаге грубая сетка сдвигается так, что ее узлы приходятся на середины предыдущих интервалов, где интегрирование в силу малости шагов h выполняется с высокой точностью.

Описанные способы испытаны на вычислительном комплексе с двумя ускорителями Power Explorer фирмы Parsytec, с 8 параллельно ра-

ботающими процессорами Power PC-601 с общей производительностью около 1000 MFLOPS при 4 байтовых числах.

Эксперименты показали удовлетворительную работу описанных способов распараллеливания. По точности результатов (в сторону ухудшения) их можно расположить как II, I, III.

ВЫВОДЫ

Предложена методика моделирования процессов переноса тепла и массы, удобная для реализации на многопроцессорных вычислительных устройствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Севостьянов А. Г., Севостьянов П. А. Моделирование технологических процессов. — М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.
3. Мезон С., Циммерман Г. Электронные цепи, системы и сигналы. — М.: ИЛ, 1963.

Рекомендована кафедрой систем автоматического проектирования и вычислительной техники. Поступила 18.06.97.
