УДК 677.022.48

ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРОКОВ ТКАНЕЙ

А. А. СОЛОДОВ

(Московская государственная текстильная академия им. А. Н. Косыгина)

Вопросы разработки более точной математической модели процесса появления местных (локализованных) пороков тканей имеют большое теоретическое и практическое значение. Традиционной моделью считается пуассоновский процесс с неслучайным и известным параметром [1...4]. Такая модель отличается простотой и в ряде случаев может применяться на практике. Однако в задачах, например, обоснования норм допустимого количества пороков уточнение простейшей модели становится необходимо. В [5] предложена модель, в соответствии с которой вероятность появления какого-то числа пороков определяется отрицательно-биномиальным распределением. При этом снижается значение критерия согласия χ^2 наблюдаемых и прогнозируемых данных по сравнению с простой пуассоновской моделью. Тем не менее, остается открытым вопрос о теоретически наилучшем приближении модели к наблюдаемым результатам.

В данной работе предлагается метод уточненного определения статистических характеристик пороков тканей. Метод основан на модели процесса появления пороков в виде пуассоновского процесса с двойной случайностью, то есть предполагается, что параметр, а вместе с ним и интенсивность пуассоновского процесса являются случайными функциями текущей длины Z контролируемого куска ткани. Для такой модели известен [6, 7] оптимальный алгоритм оценки случайной интенсивности пуассоновского процесса, который может быть применен для улучшения качества оценки.

Далее полагаем, что ткань контролируется непрерывно, а именно: просматривается в поиске местных пороков вдоль полотна (по линейной координате Z). Поэтому допускаем, что модели возникновения пороков тканей в процессе ее изготовления и в процессе контроля совпадают. В последующем в этих процессах различий не делается.

Рассмотрим возможность постановки задачи оптимального определения статистических характеристик.

Например, наблюдаемые в процессе контроля пороки ткани — это следствие реализации пуассоновского процесса с двойной случайностью, то есть параметр $\Lambda(Z)$ пуассоновского процесса, зависящий от текущей длины Z контролируемой ткани, случайная величина для фиксированного аргумента Z. Функция интенсивности пуассоновского процесса $\lambda(Z)$ связана с $\Lambda(Z)$ соотношением

$$\Lambda(Z)=\int_0^Z \lambda(u)\,du. \tag{1}$$

Далее полагаем, что $\lambda(Z)$ определяется с помощью линейного преобразования

$$\lambda(Z)=\lambda_0[(1+X(Z)], \tag{2}$$

где $X(Z)$ — безразмерный случайный процесс, формируемый линейной динамической системой, отвечающей соответствующему линейному дифференциальному стохастическому уравнению;

λ_0 — математическое ожидание функции интенсивности.

В простейшей ситуации данное уравнение примет вид

$$dX(Z)=-(1/\tau)X(Z)\,dZ+(1/\tau)\,dW(Z),\ X(0)=0, \tag{3}$$

где τ — постоянная динамической системы;

$W(Z)$ — винеровский процесс с ковариационной функцией;

$$K_W(Z_1, Z_2)=R\min(Z_1, Z_2); \tag{4}$$

R — спектральная плотность мощности винеровского процесса.

Совокупность соотношений (1...4) определяет модель процесса возникновения пороков ткани. Операция контроля описывается точечным процессом $N(Z)$ выявления пороков ткани, называемым процессом счета точек [6]. В сформулированной постановке задачи этот процесс наблюдаемый и равен числу пороков (точек), появившихся на ткани текущей длины Z. Очевидно, что процесс, вычисленный с помощью формул (1...4), не является пуассоновским. Тогда вероятность $P(n)$ — числа пороков n в куске ткани длиной Z, определяется как

$$P(n) = (1/n!) \int\limits_0 \exp(-\Lambda) \Lambda^n p(\Lambda) d\Lambda, \tag{5}$$

где $p(\Lambda)$ — одномерная плотность вероятности процесса $\Lambda(Z)$, соответствующая длине Z.

Задача заключается в формировании оптимальной по критерию минимума среднеквадратической ошибки текущей оценки $X^*(Z)$ процесса $X(Z)$ при наблюдении процесса счета пороков $N(Z)$. Наличие последней позволяет в соответствии с (2) найти и оптимальную оценку λ^* функции интенсивности. Эта оценка является важнейшей статистической характеристикой операции контроля и может использоваться, например, для текущего контроля работоспособности ткацкого оборудования.

Задача решается алгоритмом Калмана-Бьюси, модифицированным для оценки интенсивности пуассоновского процесса с двойной случайностью [7]. Алгоритм определяется связанными стохастическими уравнениями

$$dX^*(Z) = -(1/\tau) X^* dZ + \sigma(Z) [dN(Z) - \\ -\lambda_0 (1 + X^*(Z) dZ], \tag{6}$$

$$d\sigma(Z) = -(2\sigma/\tau) dZ + (K/\tau^2) dZ - \lambda_0 \sigma(Z) dZ. \tag{7}$$

Функция $\sigma(Z)$ в (7) устанавливает качество оценки, то есть текущую ошибку оценки процесса $X(Z)$. Указанный алгоритм оптимален в классе линейных алгоритмов оценки [6, 7] и, следовательно, не может быть улучшен.

В соответствии с общей теорией текущих оценок функции $X^*(Z)$ и $\sigma(Z)$ являются параметрами (математическим ожиданием и дисперсией соответственно) одномерного гауссовского распределения. В связи с этим становится возможным определение плотности $p(\Lambda)$, фигурирующей в формуле (5), и решение задачи прогнозирования числа пороков ткани произвольной длины. Действительно, поскольку случайный параметр Λ и функция интенсивности λ связаны интегралом (1), то эта плотность вероятности является тоже гауссовской с математическим ожиданием M и дисперсией Σ, равными соответственно

$$M(Z) = \int\limits_0^Z \lambda(u) du = \lambda_0 \int\limits_0^Z [1 + X^*(Z)] dZ, \tag{8}$$

$$\Sigma(Z) = \int\limits_0^Z \int\limits_0^Z K_X(u_1, u_2) du_1 du_2, \tag{9}$$

где K — ковариационная функция процесса $X(Z)$.

Простой вид уравнения (1) позволяет вычислить эту функцию, а также и интеграл (9) в явном виде.

Таким образом, совокупность представленных соотношений дает возможность решить задачу оптимального определения текущей интенсивности пуассоновского процесса и вычисления по формуле (5) вероятностей появления пороков тканей. Это важно с практической точки зрения, так как для любой текущей длины Z единственной случайной величиной, определяемой в ходе контроля, является оценка X^*. Остальные величины могут быть рассчитаны до начала процедуры контроля.

Таблица 1

Число пороков	Число кусков ткани с пороками				
	Реальное [5]	прогнозируемое			
		1	2	25	56
0	13	9,5	10,2	11,3	11,2
1	12	13,9	13,3	12,6	12,5
2	10	12,8	11,9	10,7	10,6
3	10	9,1	8,6	7,6	7,6
4	6	5,4	5,3	4,8	4,8
5	3	2,8	2,9	2,7	2,7
6	2	1,3	1,4	1,4	1,4
χ^2	—	2,74	1,79	1,74	1,71

В качестве примера использования предложенного алгоритма рассмотрим расчет статистических характеристик пороков ткани миткаль на основании данных из [5]. Было исследовано 56 кусков этой ткани и обнаружено 113 дефектов: распределение числа пороков в одном куске представлено в табл. 1.

Для реализации процедуры оптимальной текущей оценки полагаем, что поверхность ткани контролируется с линейным шагом Z. Распределим случайным образом 113 пороков по длине 56 кусков ткани так, чтобы сохранилось указанное в [5] распределение числа пороков в одном куске, которое дается в табл. 1. Результат этой процедуры показан на рис. 1. Конкретные места появления пороков (их текущие координаты Z) в каждом куске распределим также случайно. Следовательно, последовательный просмотр с выбранным линейным шагом данных кусков сформирует одну из возможных реализаций случайного точечного процесса, который в соответствии с изложенной моделью считаем пуассоновским процессом с двойной случайностью. При этом, если на текущем шаге появляется порок, то $dN=1$, если порок отсутствует, то $dN=0$.

Математический эксперимент оптимальных оценок интенсивности, рассчитанный по формулам (7) и (8), а также по формуле (5) с учетом (8) и (9) прогнозируемых вероятностей распределения числа пороков, осуществим для следующих значений переменных, отнормированных к длине куска ткани: $dZ=0\ldots0{,}1$; $\lambda_0=2$; $\tau=0{,}7$. С целью обеспечения выполнения для любого Z с вероятностью 0,999 физически очевидного неравенства $|X(Z)|-1$, полагаем в формуле (4) $\bar{k}=4/7\tau$.

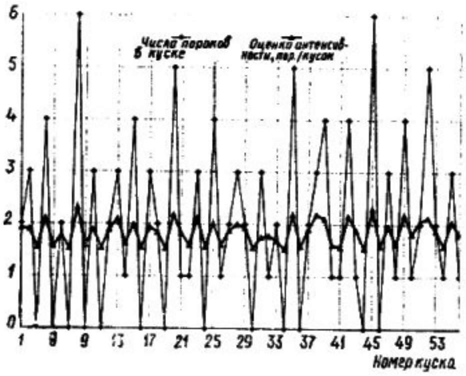

Рис. 1.

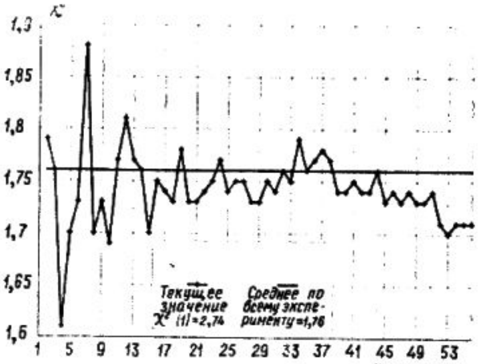

Рис. 2.

На рис. 1 изображено поведение оптимальной оценки функции интенсивности λ^*, приведенной к размерности (пороков/кусок), в конце просмотра каждого куска ткани. Оценка показывает среднюю интенсивность возникновения пороков на длине ткани, соответствующей одному куску. Она является случайной функцией, зависящей от конкретной реализации наблюдаемого процесса появления пороков. Отметим очевидную корреляцию оценки с наблюдаемым числом пороков в кусках ткани.

Наиболее интересен прогноз распределения пороков ткани и его качество. Из рис. 2, где показано поведение величины критерия согласия χ^2 реального и прогнозируемых распределений, вычисленное в конце каждого куска ткани, видно, что переходный процесс быстро завершается и качество прогноза с 13 куска характеризуется коридором χ^2 от 1,7 до 1,8. Это обстоятельство является одним из практических преимуществ алгоритма, позволяющего строить высококачественный прогноз на основе малого числа наблюдаемых данных. Все прогнозируемые в эксперименте распределения (кроме рассчитанного по первому куску) лучше согласуются с реальным, чем отрицательно-биномиальное распределение, указанное в [5]. Среднее по всему эксперименту значение χ^2, равное 1,76, лучше указанного в [5] значения 2,6 примерно на 30%. В табл. 1 приведены некоторые из вычисленных в ходе эксперимента по формуле (5) распределений чисел пороков в куске ткани.

Таким образом, представленные результаты подтверждают работоспособность предложенного алгоритма и реализуют теоретически лучшее качество определения статистических характеристик. Однако возможно совершенствование качества оценок путем разработки более сложных адекватных линейных уравнений для формирующего процесса $X(Z)$ вместо (3). Кроме того, может быть поставлена и решена задача оптимальной нелинейной оценки статистических характеристик. Поскольку процесс появления пороков является существенно негауссовским, разработка таких алгоритмов позволит, видимо, существенно улучшить полученные результаты.

ВЫВОДЫ

1. Разработана математическая модель возникновения пороков ткани в виде пуассоновского процесса с двойной случайностью.

2. На основании модели предложен уточненный алгоритм текущей оценки статистических характеристик пороков тканей.

3. Показана практическая возможность разработанного подхода к определению прогнозируемого числа пороков хлопчатобумажных тканей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кирюхин С. М.*//Текстильная промышленность. — 1974, № 1. С. 16...17.
2. *Дробинина Н. Б., Кирюхин С. М., Луцькая Т. С.*//Текстильная промышленность. — 1983, № 9. С. 58...59.
3. *Гецонок Б. И., Мустафаева М. Я.*//Известия вузов. Технология текстильной промышленности. — 1973, № 4. С. 21...24.
4. *Поздняков Б. П.* Методы статистического контроля и исследования текстильных материалов. — М.: Легкая индустрия, 1978.
5. *Соболев С. В.*//Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. — 1991, № 5. С. 8...11.
6. *Snyder D.* Random Poin Processes. — New York, London, Sydney, Toronto.: Wiley and Sons, 1975.
7. *Солодов А. В., Солодов А. А.* Статистическая динамика систем с точечными процессами. — М.: Наука, 1988.

Рекомендована кафедрой высшей математики. Поступила 13.06.97.