

## ПРОЦЕСС ИЗМЕНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ НА ПЕРИОДИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ ВОЛОКОН

И.В. ФРОЛОВА, Д. ЭНХТУЯА, П. БААСАНСУРЭН

(Ивановская государственная текстильная академия,  
Монгольский университет науки и техники)

Процесс технологической обработки разнородного волокнистого сырья из отходов пуха и ости на съемном зубчатом валике будем рассматривать в виде сплошной среды (шерстяного покрова), состоящего из трех элементов: пуха, ости и переходного волоса. Ость намного грубее пуха, с малой силой сцепления при соотношении веса одинарного волокна 1800...3000, всасываемостью влаги 14,9...12,6% и тониной 14μ...170μ против 5μ...28μ.

Запишем одномерное уравнение движения сплошной среды:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – напряжение;  $u$  – поле перемещений;  $x$  – радиус пространственного расположения частицы;  $\rho$  – плотность среды.

Будем считать, что закон связи между напряжениями  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$ :

$$\sigma = \sigma(\varepsilon). \quad (2)$$

Если эта связь соответствует упруго-пластической структуре в виде стержня, то

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3)$$

где  $E$  – модуль Юнга.

При характерной местной скорости звука

$$a(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1d\sigma}{\rho d\varepsilon}} \quad (4)$$

волновое уравнение (1) принимает вид

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Для удобства выражения скорости  $v$  и деформации  $\varepsilon$  заменим (5) эквивалентной системой двух уравнений с двумя неизвестными:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6)$$

Тогда система имеет вид

$$a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (7)$$

Волна вдоль некоторой линии съема волокна определяется как

$$x = x(s), \quad t = t(s) \quad (8)$$

на плоскости  $x, t$  с заданными значениями

$$\varepsilon = \varepsilon(x, t), \quad v = v(x, t). \quad (9)$$

После ввода четырехмерного Евклидова пространства  $R_4$  с координатами  $x, t, \varepsilon, v$  уравнения (8) и (9) задают в нем некоторую кривую  $\Gamma$ . После решения дифференциальных уравнений (7) образуется интегральная поверхность

$$\varepsilon = \varepsilon(x, t), \quad v = v(x, t). \quad (10)$$

Для однозначного определения прохождения линии  $\Gamma$  (если  $\Gamma$  не является характеристикой при рассмотрении соотношений) определим:

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt. \quad (11)$$

Для вычисления частных производных  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}$  используем системы (7) и (11), после чего получаем расширенную матрицу

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ dx & dt & 0 & 0 & d\varepsilon \\ 0 & 0 & dx & dt & dv \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Определитель матрицы (12) при условии равенства нулю дает нам уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{dt} = \pm a(\varepsilon), \quad (13)$$

а условия совместности этой системы приводят к условиям на характеристиках

$$a(\varepsilon)d\varepsilon \mp dv = 0. \quad (14)$$

После ввода функции

$$\varphi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon a(\varepsilon) d\varepsilon \quad (15)$$

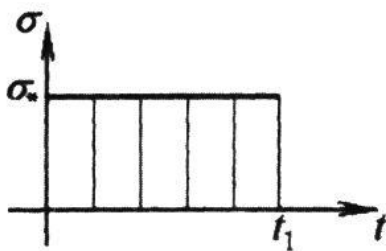


Рис. 1

Значение  $\sigma_*$  ( $\sigma_x$ ) соответствует некоторой деформации (рис. 1). На рис. 2 показан предел пластичности  $\sigma_s$ . Если  $\sigma_* < \sigma_s$ , то

$$a \equiv a_0 \equiv \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (21)$$

соотношение (14) найдем в виде

$$d[v \mp \varphi(\varepsilon)] = 0. \quad (16)$$

Система дифференциальных уравнений (7) имеет два семейства условий:

$$\left. \begin{aligned} dx - a(\varepsilon)dt &= 0, \\ v - \varphi(\varepsilon) &= \eta = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} dx + a(\varepsilon)dt &= 0, \\ v + \varphi(\varepsilon) &= \xi = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где  $\xi$  – произвольный симметричный тензор (константа);  $\eta$  – симметричный тензор или тензор несовместности.

Соотношения (17) относятся к прямой волне, а (18) – к обратной, где фронт волны – это линия, отделяющая возмущенную область от невозмущенной.

При рассмотрении полубесконечного фрагмента структуры волокон при  $t = 0$  он покоится при

$$t = 0, \quad u = 0, \quad v = 0. \quad (19)$$

Граничные условия на торце фрагмента (рис. 1) при заданных скорости или напряжениях:

$$x = 0, \quad \sigma(t) = \sigma_* [h(t) - h(t - t_1)]. \quad (20)$$

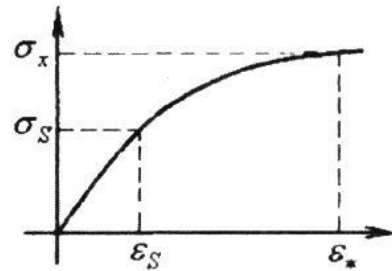


Рис. 2

а решение волнового уравнения имеет вид

$$u = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t). \quad (22)$$

Характеристиками и условиями (17) и (18) будут соответственно

$$x - a_0 t = C_1, \quad v - a_0 \varepsilon = \eta, \quad (23)$$

$$x + a_0 t = C_2, \quad v + a_0 \varepsilon = \xi. \quad (24)$$

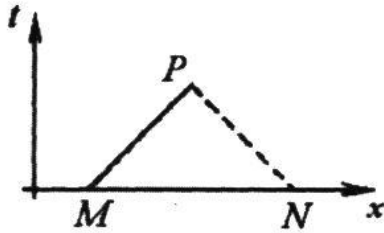


Рис. 3

Из произвольной точки P на плоскости  $x, t$  проводим две характеристики PM и PN (рис. 3, где вдоль PM выполняется условие  $v = a_0 \varepsilon + \eta$ , а вдоль PN – условие  $v = -a_0 \varepsilon + \xi$ ; при  $C_1$  и  $C_2 > 0$  область покоя структуры волокон).

При  $t = 0, v = 0$  и  $\varepsilon = 0$ . Отсюда следует, что  $\xi = \eta = 0$ . Тогда в точке P имеем  $v = a_0 \varepsilon = -a_0 \varepsilon$ , откуда  $v = 0$  в точке P.

Следовательно, если  $C_1$  и  $C_2$  в (23) и (24) больше нуля, то соответственно точка P находится в области покоя.

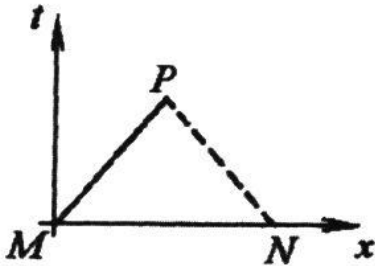


Рис. 4

Характеристика  $x - a_0 t = 0$  (рис.4) вдоль PM  $v = a_0 \varepsilon + \eta$ , а вдоль PN  $v = -a_0 \varepsilon$ . Следовательно, в точке P  $v = -a_0 \varepsilon_P = -\frac{\eta}{\varepsilon}$ . При  $\varepsilon = \varepsilon_0$  в точке M. Тогда на всей линии MP

$$v = -a_0 \varepsilon_*. \quad (25)$$

$$u = \varepsilon_* \{ (x - a_0 t) h(a_0 t - x) + [a_0 (t - t_1) - x] h(a_0 (t - t_1) - x) \}, \quad (26)$$

$$v = [-a_0 h(a_0 t - x) + a_0 h(a_0 (t - t_1) - x)] \varepsilon_*, \quad (27)$$

$$\varepsilon = [h(a_0 t - x) - h(a_0 (t - t_1) - x)] \varepsilon_*. \quad (28)$$

Условие будет верным, если точка M окажется на прямой  $x = 0$  при  $t$ , когда  $\varepsilon = \varepsilon_*$ .

Следовательно, область выше прямой

$$x = a_0 t - a_0 t_0$$

на плоскости  $x, t$  соответствует области покоя, иначе для этой области в (25) следует положить  $\varepsilon_*$ .

Таким образом, по картине характеристик можно графически определить распределение деформаций, скорости и перемещения в любой момент времени по длине отрезка структурного фрагмента из волокон на съемном барабане, а также распределение этих величин по времени (рис.5).

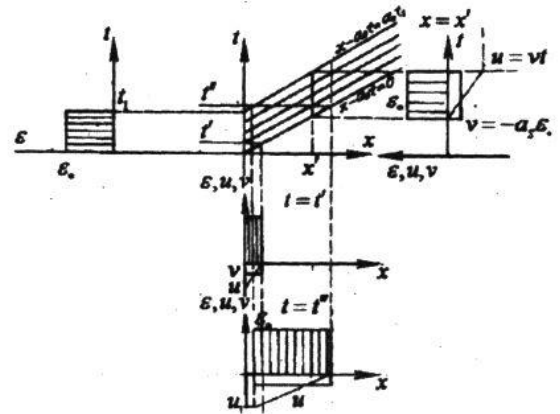


Рис. 5

Таким образом, ступенька возмущения все время смещается вправо, а после прохождения возмущения в структуре фрагмента остается перемещение

$$u_1 = -a_0 \varepsilon_* t_1.$$

При аналитическом рассмотрении решение имеет вид:

При плавно меняющейся деформации (рис. 6) деформации  $\varepsilon = \varepsilon_s$  на плоскости  $x, t$  будет соответствовать характеристика

$$a - a_0 t = -a_0 t_1.$$

Большим деформациям, превышающим  $\varepsilon_s$  (рис. 2), будет соответствовать меньшая скорость звука  $a(\varepsilon)$ .

Рассмотрим точку P, лежащую выше характеристики  $x - a_0 t = -a_0 t_1$  и проведем из нее две характеристики PM и PN, которые могут и не являться прямыми. Вдоль PM  $v = \varphi(\varepsilon) + \eta$ , а вдоль PN  $v = -\varphi(\varepsilon) + \xi$ .

В точке N  $v = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ , а значит  $\xi = 0$ . Тогда в точке P  $v = \varphi(\varepsilon_p) + \eta = -\varphi(\varepsilon_p)$ , поэтому в точке M  $v = \varphi(\varepsilon_m) + \eta = -\varphi(\varepsilon_m)$ . Следовательно,  $\varepsilon_p = \varepsilon_m$ .

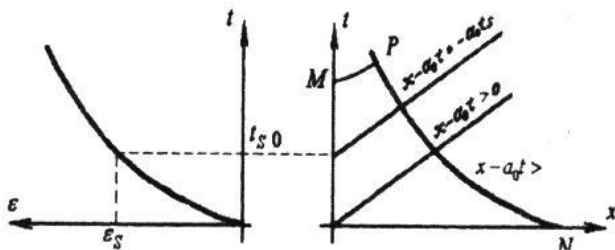


Рис. 6

Значит, вдоль каждой положительной характеристики MP в области  $x - a_0 t < -a_0 t_s$  (рис.6)  $v$  и  $\varepsilon$  сохраняют постоянные значения, причем  $\varepsilon = \varepsilon_m$  (значение деформации при  $x = 0$ ).

Отсюда следует, что MP – прямолинейная характеристика и ее наклон определяется выражением

$$a_m = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}(\varepsilon_m).$$

При внезапной деформации  $\varepsilon_* \geq \varepsilon_s$  (рис.7) для каждой характеристики  $\varepsilon = \text{const}$ , а следовательно,  $a(\varepsilon) = \text{const}$ . Значения для характеристик  $x - a(\varepsilon)t = -a(\varepsilon)t_k$  при фиксированном  $t_k < t$  таковы:  $v = -a(\varepsilon)\varepsilon$ .

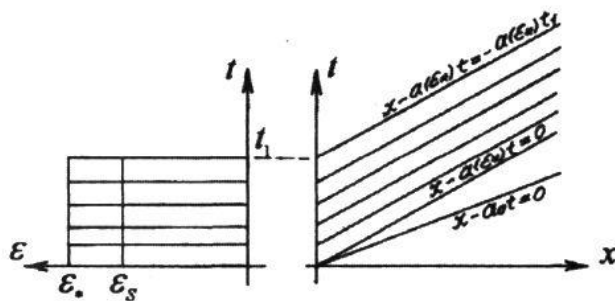


Рис. 7

Между характеристиками  $x - a_0 t = 0$  и  $x - a(\varepsilon_*)t = 0$  имеется неопределенность.

Деформация испытывает скачок от 0 до  $\varepsilon_s$ , а скорость – от 0 до  $v = -a_0 \varepsilon_s$ . Деформация  $\varepsilon$  при  $t = 0$ ,  $\varepsilon_s \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*$  соответствует характеристике  $x = a(\varepsilon_*)t + \text{const}$ .

Все деформации со значениями от  $\varepsilon_s$  до  $\varepsilon_*$  начинают распространяться одновременно с разными скоростями, поэтому в нуле имеется так называемый веер характеристик, которые соответствуют волнам Римана. В области между характеристиками  $x - a(\varepsilon_*)t = 0$  и  $x - a(\varepsilon_*)t = -a(\varepsilon_*)t_1$  скорость распространения волн одна и та же и равняется

$$a_* = a(\varepsilon_*).$$

Уравнение характеристики для любой волны Римана имеет вид

$$x - a_* t = -a_* t_1 < a(\varepsilon) < a_0,$$

$a(\varepsilon)$  является известной величиной:

$$a_*(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{t} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}},$$

откуда  $\varepsilon = a^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)$ .

Соответствующую скорость определяем по формуле

$$v = \varphi(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} a(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (29)$$

В момент  $t = t_1$  начинает распространяться новая волна – волна полной (окончательной) разгрузки съёмного валика от пуха (волна X. А. Рахматуллина) – рис. 8.

Рекомендована кафедрой проектирования и технологии трикотажных изделий. Поступила 07.06.04.

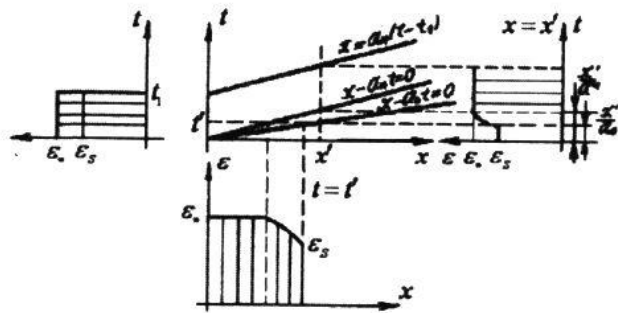


Рис. 8