

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СУШКИ ПОРИСТЫХ ТЕЛ*

И.П. КОРНЮХИН, Л.И. ЖМАКИН, Т.А. КОРНЮХИНА

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

В [1] проанализированы известные методы расчета тепломассообмена в пористых телах применительно к процессам сушки и выделены две из работ [2] и [3], в которых получена замкнутая система уравнений, причем замыкание осуществляется с помощью уравнений межфазного равновесия, уравнений изотерм десорбции. Однако первая из них – [2] относится к случаю пористых тел периодической структуры, вторая – [3] относится к телам произвольной структуры, но по оценкам, проведенным в [1], сделано заключение, что полученная система может быть использована для описания лишь процессов сушки малой интенсивности.

В данной и последующих работах ставится задача – получить замкнутую систему дифференциальных уравнений сушки пористого тела с произвольной структурой применительно к процессам тепломассообмена высокой интенсивности.

В качестве базового в настоящей статье выбран подход к получению уравнений тепломассообмена в пористых телах, основанный на использовании традиционных, классических законов сохранения и переноса, используемых в механике сплошных сред без привлечения каких-либо постулатов о форме используемых уравнений. Представление конвективного переноса основывается на рассмотренном в [1] описании движения в ненасыщенных пористых средах.

В пористых телах можно указать три характерных масштаба d , ℓ , L и три соответствующих объема V_d , V_ℓ , V_L таких, что $d \ll \ell \ll L$ и $V_d \ll V_\ell \ll V_L$. В дальнейшем будем исходить из того, что в области V_ℓ объем V_d , характерный для капилляров, рассматривается как бесконечно

малый. В свою очередь V_ℓ рассматривается как элементарный объем относительно всего пористого тела, занимающего область V_L .

Вывод дифференциальных уравнений базируется на использовании интегральных балансовых уравнений в предположении локального в области V_d термодинамического равновесия между тремя фазами – твердой (скелет пористого тела), жидкой и газообразной. Эти условия предполагают равенство температур фаз и равенство химических потенциалов, определяющих состояние межфазного равновесия пар–жидкость. Газообразная фаза рассматривается как двухкомпонентная смесь сухого воздуха и водяного пара.

Благодаря хаотичной структуре пористой среды наблюдаются пульсации отдельных параметров, характеризующих тепломассообмен. В связи с этим какой-либо из пульсирующих параметров можно представить в виде $g = \langle g \rangle + g'$, где через $\langle g \rangle$ обозначено среднее значение, а через g' – величина пульсации. Как и при анализе турбулентных пульсаций, при выводе уравнений Рейнольдса (например, [4]) будем исходить из того, что $\langle g' \rangle = 0$.

Временной масштаб пульсаций можно оценить по порядку величины – как $\tau_d \approx d/w$, а время сушки – как $\tau_L \approx L/w$, поскольку $\tau_d \ll \tau_L$ пульсации можно рассматривать как квазистационарные, а осреднение параметров производить только по пространственным характеристикам. Однако обусловленные пульсациями осредненные параметры следует рассматривать как функцию времени, соизмеримого с τ_L .

* Начало.

Введем функцию $\alpha^\beta(x_i)$, определенную как

$$\alpha^\beta(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_i \notin V_d^\beta \\ H(x_i) & \text{при } x_i \in f_0^\beta \\ 1 & \text{при } x_i \in V_d^\beta \end{cases} \quad \beta = f, g, s.$$

Здесь β – номер фазы; V_d^β – объем, занимаемый фазой β в области V_d , f_0^β – поверхность, ограничивающая фазу β ; $H(x_i)$ – ступенчатая функция Хевисайда; индексы f, g, s относятся к жидкой, газообразной и твердой фазам соответственно.

Основываясь на этом определении, заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_\ell} \int_{V_\ell} \alpha^s(x_i) dV_d &= \frac{V_d^s}{V_\ell} \equiv 1 - \varepsilon; \\ \frac{1}{V_\ell} \int_{V_\ell} \alpha^f(x_i) dV_d &= \frac{V_d^f}{V_\ell} \equiv \varepsilon\theta, \\ \frac{1}{V_\ell} \int_{V_\ell} \alpha^g(x_i) dV_d &= \frac{V_d^g}{V_\ell} \equiv \varepsilon(1 - \theta), \end{aligned} \quad (1)$$

где ε – пористость; θ – насыщенность (доля объема, занимаемая жидкой фазой в поровом пространстве); V_d^s, V_d^f и V_d^g – объемы, занимаемые твердой, жидкой и газообразной фазами в области V_ℓ .

При таком подходе процедура осреднения по объему V_ℓ некоторой функции g может быть представлена как

$$\langle (gQ)^\beta \rangle_\ell = \frac{1}{V_\ell} \int_{V_\ell} (gQ)^\beta \alpha^\beta(x_i) dV_d = \frac{V_d^\beta}{V_\ell} \langle (gQ)^\beta \rangle_d. \quad (2)$$

Аналогичный подход сохраняется и

при осреднении потоков по поверхности:

$$\langle (gQv)^\beta \rangle_\ell = \frac{1}{f_\ell} \int_{f_\ell} (gQv)^\beta n \alpha^\beta(x_i) df_d = \frac{f_d^\beta}{f_\ell} \langle (gQv)^\beta n \rangle_d + \frac{f_0^\beta}{f_\ell} \langle (gQv)^\beta n_0 \rangle_d. \quad (3)$$

В уравнении (3) через n и n_0 обозначены единичные векторы нормали к поверхности, проходящей внутри фазы β , и к межфазной поверхности, ограничивающей эту фазу. В частности, второе слагаемое в правой части формулы (3) характеризует перенос через межфазную поверхность жидкость–газ. Здесь и далее будем исходить из предположения, что поверхность контакта жидкости и газа с твердой фазой непроницаема.

Следует подчеркнуть, что несмотря на одинаковые обозначения параметров в левой и правой частях уравнений (2) и (3) их различие определяет индекс при угловых скобках, характеризующий область, в которой производится осреднение. Так, например, величина $\langle Q^\beta \rangle_\ell$ представляет собой среднюю массовую концентрацию,

массу фазы β в единице объема V_ℓ , в то время как $\langle Q^\beta \rangle_d$ характеризует фактическую плотность этой фазы, определяемую параметрами состояния среды.

Подобным же образом $\langle v \rangle_d$ представляет собой среднюю скорость движения фазы в капиллярах, а $\langle v \rangle_\ell$ совпадает со скоростью фильтрации w .

По аналогии с уравнением (1) отношения площадей поверхностей можно представить в следующей форме:

$$\frac{f_d^s}{f_\ell} = 1 - \tilde{\varepsilon}; \quad \frac{f_d^f}{f_\ell} = \tilde{\varepsilon}\tilde{\theta}; \quad \frac{f_d^g}{f_\ell} = \tilde{\varepsilon}(1 - \tilde{\theta}). \quad (4)$$

Здесь величины $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\theta}$ – поверхностные аналоги пористости и насыщенности

(первая из них называется просветностью). Как показано в [5], у изотропных пористых тел, для которых значения поверхностных показателей не зависят от расположения поверхности f_ℓ , пористость совпадает с просветностью. Выполнение таких условий будет предполагаться в дальнейшем.

Законы сохранения для объема V_ℓ представим в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{V_\ell} \rho^\beta dV_d = - \int_{f_\ell} (\rho v)^\beta n df_d, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{V_\ell} (\rho v_i)^\beta dV_d = - \int_{f_\ell} \Pi_{ij}^\beta df_{dj}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{V_\ell} (\rho h - p) dV = - \int_{f_\ell} q n df + \int_{V_\ell} q_v dV, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{V_\ell} \rho_p^v dV_d = - \int_{f_\ell} j^v n df_d, \quad (8)$$

причем

$$\Pi_{ij}^\beta = p^\beta \delta_{ij} + (\rho v_i v_j)^\beta - s_{ij}^\beta, \quad (9)$$

$$\rho h = \sum_\beta (\rho h)^\beta, \quad (10)$$

$$q = \sum_\beta (\rho c v)^\beta t - \lambda \nabla t, \quad (11)$$

$$j^v = \rho^v v^g - \rho^g \tilde{D} \nabla \omega^v, \quad (12)$$

$$i, j = 1, 2, 3; \beta = f, g.$$

Уравнения (5...8) представляют собой соответственно уравнения неразрывности для двух фаз – жидкой и газообразной; записанный в проекциях на координатные оси закон сохранения импульса также для двух фаз; закон сохранения энергии и уравнение, описывающее сохранение массы пара в газообразной фазе.

Использованные в (5...12) обозначения описаны ниже: Π_{ij}^β – плотность потока импульса в фазе β ; δ_{ij} – символ Кронекера; s_{ij}^β – тензор вязких напряжений (напряжений сдвига) в фазе; q – плотность потока тепла за счет конвекции и теплопроводности;

h^β – удельные массовые энтальпии для трех фаз ($\beta = f, g, s$); c – удельная массовая изобарная теплоемкость; t – температура; $(\rho h - p)$ – внутренняя энергия единицы объема; λ – коэффициент теплопроводности влажного пористого тела; j^v – массовая плотность потока пара во влажном воздухе; ω^v – массовая доля пара в парогазовой смеси; \tilde{D} – коэффициент диффузии водяного пара во влажном воздухе; q_v – объемная мощность внутренних источников энергии, обусловленных внешним воздействием, например, проникающим тепловым излучением, токами высокой частоты и т.д.

Предполагается, что величина q_v определяется либо условиями однозначности рассматриваемой задачи, либо специальным уравнением, связывающим ее значение с характеристиками влажного пористого тела. В дальнейшем q_v предполагается заданным. В приведенных выше уравнениях и далее по тексту используется правило суммирования по повторяющемуся индексу.

Уравнение энергии (7) представлено в соответствии с подходом, развитым в [6], согласно которому изменение внутренней энергии определяется потоками энтальпии, теплоты за счет теплопроводности и интенсивностью внутренних источников. Вкладом кинетической энергии потока и диссипацией механической энергии в общий баланс пренебрегаем.

В уравнениях (5...8) интегралы по объему V_ℓ и поверхности f_ℓ имеют ту же форму, что и в операциях осреднения (2...3). Этот факт дает возможность представить уравнение неразрывности (5) для газообразной фазы (влажного воздуха) в виде

$$V_\ell \frac{\partial}{\partial \tau} \langle \rho^g \rangle_\ell = f_\ell \langle (\rho v)^g n \rangle_\ell. \quad (13)$$

Как было принято ранее, характерный размер области осреднения ℓ намного меньше характерного размера пористого

тела L. При описании процессов в области V_L можно перейти к пределу

$$\lim_{V_\ell \rightarrow 0} \frac{f_\ell}{V_\ell} = \nabla,$$

где ∇ – оператор Гамильтона (набла).

Выполнив такой предельный переход в

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\varepsilon(1-\theta) \langle \rho^g \rangle_d \right) = -\nabla \left(\tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\theta}) \langle (\rho v)^g \rangle_d \right) + \varepsilon \langle R^v \rangle. \quad (15)$$

Аналогичные преобразования уравне-

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\varepsilon \theta \langle \rho^f \rangle_d \right) = -\nabla \left(\tilde{\varepsilon} \tilde{\theta} \langle (\rho v)^f \rangle_d \right) - \varepsilon \langle R^v \rangle. \quad (16)$$

В последних двух уравнениях член εR^v определяет интенсивность фазовых переходов (массу пара, образующегося в единицу времени в единице объема V_L).

уравнении (13), получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \rho^g \rangle_\ell = -\nabla \langle (\rho v)^g \rangle_\ell. \quad (14)$$

Используя связь средних значений по областям с характерными размерами ℓ и d , определяемую уравнениями (2...3), преобразуем (14) к виду

уравнения неразрывности для жидкости дают

Аналогично преобразуются и остальные уравнения (6...8).

Так, уравнения движения фаз преобразуются к форме

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\varepsilon(1-\theta) \langle (\rho v_i)^g \rangle_d \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\theta}) \langle (\rho v_i v_j)^g \rangle_d \right) + \varepsilon \langle R^v v_i^f \rangle - \tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\theta}) \frac{\partial \langle p^g \rangle}{\partial x_i} + \gamma^g \frac{\partial \langle s_{ij}^g \rangle}{\partial x_j}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\varepsilon \theta \langle (\rho v_i)^f \rangle_d \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\varepsilon} \tilde{\theta} \langle (\rho v_i v_j)^f \rangle_d \right) + \varepsilon \langle R^v v_i^g \rangle - \tilde{\varepsilon} \tilde{\theta} \left(\frac{\partial \langle p^g \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle p_c \rangle}{\partial x_i} \right) + \gamma^f \frac{\partial \langle s_{ij}^f \rangle}{\partial x_j}. \quad (18)$$

В этих уравнениях γ^β – коэффициент, учитывающий форму и размеры капилляров и их насыщенность жидкостью.

Обусловленный капиллярными силами межфазный скачок давления p_c учтен в уравнении движения для жидкости (18). Обосновывается такой подход при помощи уравнения Лапласа $p^f = p^g + p_c$, связывающего величины давлений в фазах с искривленной межфазной поверхностью (p_c – капиллярное давление).

Для большинства процессов сушки характерно, что жидкость смачивает поверхность твердой фазы и, следовательно, образует вогнутые мениски, так что $p_c < 0$. Второе слагаемое справа в уравнениях (17) и (18) определяет величину скачка им-

пульса, обусловленного фазовыми переходами. Вязкостные напряжения для фаз определяются на основании обсуждавшегося в [1] подхода Леверетта [7] к описанию совместного движения несмешивающихся жидкостей в пористых телах.

Модификацию закона Дарси для этих условий [7] можно представить в форме

$$v^\beta = \frac{K^\beta}{\tilde{\varepsilon} \tilde{\theta}^\beta \eta^\beta} \nabla p^\beta, \quad (19)$$

$$K^\beta = K \psi^\beta(\theta^\beta). \quad (20)$$

В этих уравнениях K^β – фазовая проницаемость; $\psi^\beta(\theta)$ – относительная фазовая проницаемость (отношение проницае-

мости фазы β к проницаемости пористого тела K), являющаяся функцией насыщенности θ . Обозначение θ^β характеризует $\theta^f = \theta$ и $\theta^g = 1 - \theta$.

Поскольку градиент давления в (19) обусловлен вязкостными напряжениями, то последнее слагаемое в уравнениях (17) и (18) можно выразить как

$$\gamma^\beta \frac{\partial \langle s_{ij}^\beta \rangle}{\partial x_j} = -\Xi^\beta v_i \quad \Xi^\beta = \frac{\eta^\beta (\tilde{\varepsilon} \tilde{\theta}^\beta)^2}{K^\beta}, \quad (21)$$

где Ξ – вязкостное сопротивление.

В (21) использована форма закона Дарси со скоростью в качестве аргумента. Эта форма представлена в [8] для случая дви-

жения при полном насыщении $\theta = 1$ и модифицирована здесь применительно к движению несмешивающихся жидкостей ($\theta \neq 1$). Поскольку относительные фазовые проницаемости определяются экспериментально (их примерные графики показаны на рис. 1 в [1]), следует ожидать, что при такой форме представления вязкостных членов автоматически учитываются напряжения трения на межфазной границе. По этой причине скачок межфазных напряжений не рассматривался при получении уравнений (17) и (18).

Преобразование уравнения энергии (7) с учетом описанного выше предельного перехода и формулы (11) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left((1-\varepsilon) \langle (\rho h)^s \rangle_d + \varepsilon \theta \langle (\rho h)^f \rangle_d + \varepsilon (1-\theta) \langle (\rho h)^g \rangle_d - \varepsilon (1-\theta) \langle p^g \rangle \right) = \\ = -\nabla \cdot \left(\tilde{\varepsilon} \tilde{\theta} \langle (\rho h v)^f \rangle_d + \tilde{\varepsilon} (1-\tilde{\theta}) \langle (\rho h v)^g \rangle_d \right) + \nabla \cdot (\lambda \nabla t) + \langle q_v \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение диффузии водяного пара во влажном воздухе (8) преобразуется анало-

гичным образом с учетом формулы (12):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\varepsilon (1-\theta) \chi \langle \rho^v \rangle_d \right) = -\nabla \cdot \left(\tilde{\varepsilon} (1-\tilde{\theta}) \left(\omega^v \langle \rho^v v^g \rangle_d - \left\langle \rho^g \tilde{D} \nabla \left(\frac{\rho^v \omega^v}{\rho^g} \right) \right\rangle \right) \right) + \varepsilon \langle R^v \rangle, \quad (23)$$

где ρ^v – плотность пара при полном давлении смеси; χ – объемная доля пара во влажном воздухе.

Приняв предположение, что влажный воздух можно рассматривать как идеальный газ, которое с хорошей точностью реализуется на практике, заметим, что объемная доля пара совпадает с молярной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнюхин И.П., Жмакин Л.И., Козырев И.В. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2004, №4. С.94...99.
2. Корнюхин И.П., Охотин А.С. // Промышленная теплотехника. – 1989, т.11, №3. С.18..25.

3. Решетин О.Л., Орлов С.Ю. // Журнал технической физики. – 1998, т. 68, № 2. С. 102...105.
4. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1975.
5. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Г. и др. Механика насыщенных пористых сред. – М.: Недра, 1970.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
7. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир, 1964.
8. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. – М.: Недра, 1996.

Рекомендована кафедрой промышленной теплотехники. Поступила 05.02.04.