УДК 677.024

УТОЧНЕНИЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА С ПЕРЕМЕННОЙ ВО ВРЕМЕНИ ВЯЗКОСТЬЮ

М.С. БОГАТЫРЕВА, М.Н. ЕРОХОВА

(Костромской государственный технологический университет)

При описании деформационных свойств текстильных материалов широко применяются модели стандартного вязкоупругого тела (рис.1 и 2), закон деформирования которых имеет вид [1]:

$$E_0 n\frac{d\varepsilon}{dt}+E_\infty\varepsilon=n\frac{d\sigma}{dt}+\sigma, \qquad (1)$$

где E_0 – мгновенный модуль упругости, МПа; E_∞ – длительный (релаксационный) модуль упругости, МПа; n – время релаксации, с.

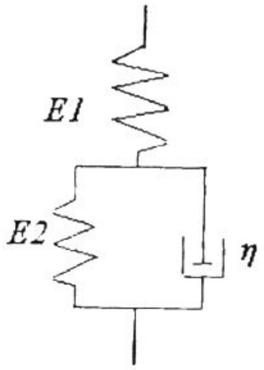

Рис. 1

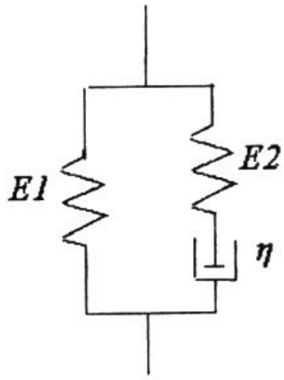

Рис. 2

Для схемы (рис.1) параметры уравнения (1) равны:

$$E_0=E1,\ E_\infty=\frac{E1E2}{E1+E2},\ \ n=\frac{\eta}{E1+E2}, \qquad (2)$$

а для схемы (рис.2):

$$E_0=E1+E2,\ \ E_\infty=E1,\ \ n=\frac{\eta}{E2}. \qquad (3)$$

Однако недостатком данных моделей является довольно быстрое протекание процессов релаксации и ползучести. Реальные полимеры обладают определенным набором частиц с разными временами релаксации. В связи с этим вязкость поршня, отражающего податливость материала, должна быть переменной во времени.

Принимаем, что модуль вязкости в моделях является функцией времени:

$$\eta=\eta_0 t^{1-\mu}, \qquad (4)$$

где η_0 – начальный модуль вязкости, $Н\cdot с^\mu/м^2$; $0<\mu<1$ – эмпирический коэффициент.

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$E_0 n(t)\frac{d\varepsilon}{dt}+E_\infty\varepsilon=n(t)\frac{d\sigma}{dt}+\sigma. \qquad (5)$$

Общее решение уравнения (5) для деформаций согласно [1] выглядит так:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\left[\sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau)K(t,\tau)d\tau\right], \qquad (6)$$

где $K(t, \tau)$ – ядро ползучести, характеризующее реологические свойства материала.

Для рассматриваемых моделей функция $K(t, \tau)$:

$$K(t,\tau) = \frac{E_0 - E_\infty}{n(\tau)E_0} e^{-\frac{E_\infty}{E_0}\int_\tau^t \frac{d\tau}{n(\tau)}}. \qquad (7)$$

Соответственно для напряжений имеем:

$$\sigma(t) = E(t)\left[\varepsilon(t) - \int_0^t \varepsilon(\tau)R(t,\tau)d\tau\right], \qquad (8)$$

где $R(t, \tau)$ – ядро релаксации:

$$R(t,\tau) = \frac{E_0 - E_\infty}{n(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{d\tau}{n(\tau)}} \frac{1}{E_0}. \qquad (9)$$

Известно, что $K(t)>R(t)$ для любых $t > 0$ и $R(t)$ убывает быстрее, чем $K(t)$ [1].

Функцию $R(t, \tau)$ называют резольвентой ядра $K(t, \tau)$, а функция $K(t, \tau)$, в свою очередь, является резольвентой ядра $R(t, \tau)$.

Пусть $\frac{E_\infty}{E_0} = \alpha$, тогда для данных моделей уравнение ползучести:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{E_0}\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha\frac{x}{\mu}t^\mu}\right), \qquad (10)$$

где $\varepsilon(t)$ – деформация материала в момент времени t; σ – напряжение, при котором протекает процесс ползучести, МПа; $x = \frac{E_\infty}{\eta_0}$ – параметр материала, характеризующий время запаздывания при начальном модуле вязкости поршня, c^{-1}.

Аналогично получим уравнение релаксации:

$$\sigma(t) = \varepsilon E_0 - \varepsilon E_0(1-\alpha)\left(1 - e^{-\frac{x}{\mu}t^\mu}\right), \qquad (11)$$

где $\sigma(t)$ – напряжение материала в момент времени t, МПа; ε – деформация, при которой протекает процесс релаксации.

Подставив (4) в (7) и (9), получим ядро и резольвенту:

$$K(t) = (1-\alpha)xt^{\mu-1}e^{-\alpha\frac{x}{\mu}t^\mu}, \qquad (12)$$

$$R(t) = (1-\alpha)xt^{\mu-1}e^{-\frac{x}{\mu}t^\mu}. \qquad (13)$$

Согласно [2,с.71] функция (13) соответствует функции Кольрауша:

$$R(t) = (1-\alpha)\mu t^{-1}(t/\tau_p)^\mu e^{-\left(\frac{t}{\tau_p}\right)^\mu}, \qquad (14)$$

где $\tau_p = \left(\frac{\mu}{x}\right)^{\mu^{-1}}$ – время релаксации, а параметр μ является структурной характеристикой материала.

Для функции (14) А.М. Сталевичем разработаны [2] физически обоснованные и достаточно простые методы определения параметров τ_p и μ. Аналогично можно определить и параметры функции (12).

Ядро типа (13) известно как ядро Г.А.Слонимского, а при $\mu = x$ имеем ядро А.И. Бронского [3]. Согласно [4] резольвентой таких ядер является функция, полученная М.А. Колтуновым через преобразование Лапласа:

$$R'(t)=\frac{e^{-xt^{\alpha}}}{t^{\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\left[x\alpha\Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha}\right)\right]^{k}}{\Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha}k\right)}t^{(2\alpha-1)^{k}}\;, \tag{15}$$

где $\Gamma(***)$ – гамма-функция аргумента $***$.

Следует отметить, что данная резольвента получена как функция релаксации, когда ядро (13) в отличие от рассматриваемых моделей применяется как функция ползучести. Вследствие этого, пользуясь формулой (15) по методу построения резольвентного ряда А.Р. Ржаницына [1], выведем резольвенту ядра (13) как функцию ползучести:

$$K'(t)=\frac{e^{-xt^{\alpha}}}{t^{\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[x\alpha\Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha}\right)\right]^{k}}{\Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha}k\right)}t^{(2\alpha-1)^{k}}\;. \tag{16}$$

Недостатком функций (15) и (16) является невозможность аналитического решения уравнения состояния даже для простых режимов нагружения. Кроме того, параметры для подобных функций определяются, как правило, численными методами, которые не могут гарантировать однозначного набора параметров, не говоря уже об их физической обоснованности.

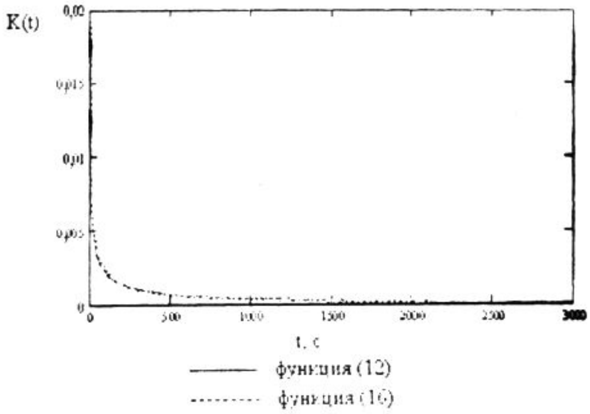

Рис. 3

Сравним функции (12) и (16). На рис. 3 представлены кривые, построенные для следующего набора параметров: $\mu = 0{,}4$; $\alpha = 0{,}3$; $x = 0{,}03$ c^{-1}. Видим, что кривые практически совпадают.

Таким образом, функции (12) и (16) идентичны и взаимозаменяемы, но при этом функция (12) гораздо удобнее для практических расчетов и ее модельное происхождение позволяет в случае необходимости рассчитать энергетические затраты.

Параметры ядра (13) связаны с параметрами модели (рис. 1) как:

$$\alpha=\frac{E_{\infty}}{E_0}=\frac{E2}{E1+E2},\; x=\frac{E_{\infty}}{\eta_0}=\frac{E1\alpha}{\eta_0},$$

а для модели рис. 2:

$$\alpha=\frac{E_{\infty}}{E_0}=\frac{E1}{E1+E2},\; x=\frac{E_{\infty}}{\eta_0}=\frac{E2}{\eta_0}.$$

ВЫВОДЫ

1. Моделям стандартного вязкоупругого тела с переменной во времени вязкостью соответствуют ядра Слонимского–Бронского, а также уравнение Кольрауша.

2. При описании деформационных свойств текстильных материалов с использованием рассматриваемых моделей имеем резольвентное ядро, более удобное для практических расчетов, чем полученное через преобразование Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968.

2. *Сталевич А.М.* Деформирование высокоориентированных полимеров. – Ч.2.Теория нелинейной вязкоупругости: Конспект лекций/СПГУТД. – СПб, 1997.

3. *Уржумцев Ю.С., Майборода В.П.* Технические средства и методы определения прочностных характеристик конструкций из полимеров. – М.: Машиностроение, 1984.

4. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. – М.: Наука, 1972.

Рекомендована кафедрой ткачества. Поступила 22.09.04.