

УДК 677.021

**УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВОЛОКНИСТОЙ ЛЕНТЫ
В РАБОЧЕЙ КАМЕРЕ МОДИФИКАТОРА***

С.Н. РАЗИН

(Костромской государственной технологической университет)

Процесс механической модификации льняного волокна в ленте по способу [1] является циклическим. Время цикла можно разбить на два этапа, один из которых соответствует продолжительности контакта ленты с билом. На втором этапе происходит опускание ленты из отклоненного положения. От того, в каком положении находится лента в момент начала ее взаимодействия с билом, зависит величина силы ее натяжения – основного фактора, влияющего на длину получаемых на выходе из устройства модифицированных волокон.

При увеличении частоты вращения возможен случай, когда лента не успеет из отклоненного положения вернуться в исходное – вертикальное – и тогда максимальное натяжение ленты уменьшится. В связи с этим задача по определению движения ленты на втором этапе является весьма важной.

С целью решения поставленной задачи представим ленту как n прямолинейных жестких элементов, соединенных шарнирами O_1, O_2, O_3 и упругими элементами, препятствующими их повороту относительно друг друга (рис. 1). Жесткость с упругих элементов (Н·м/рад) определим из условия равенства прогиба балки Δ_1 с изгибной жесткостью EJ (равной изгибной жесткости ленты) и прогиба Δ_2 системы, состоящей из n стержней (модельного представления ленты), в случае их нагружения силой F в концевом сечении.

Известно, что прогиб консольной балки в концевом сечении, если пренебречь массой стержней, можно найти по формуле

$$\Delta_1 = FL^3 / 3EJ. \tag{1}$$

Для модельного представления ленты:

$$\Delta_2 = L \sum_{i=1}^n \varphi_i / n. \tag{2}$$

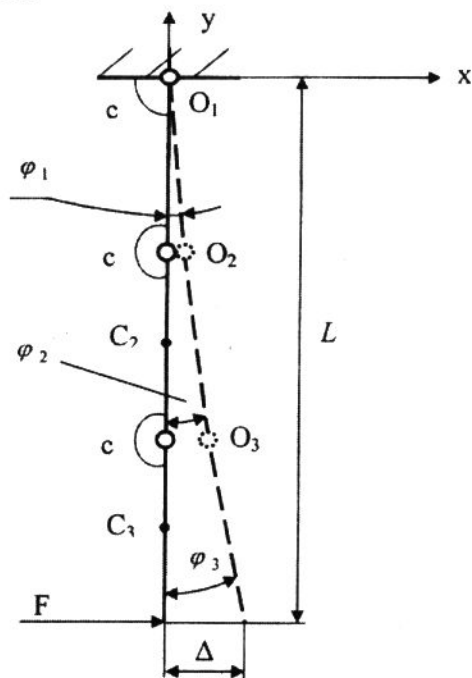


Рис. 1

* Начало.

$$\text{Но } \varphi_1 = \frac{FL}{c}, \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{FL}{c} \frac{n-1}{n}, \dots, \\ \varphi_n = \varphi_{n-1} + \frac{FL}{c} \frac{1}{n}.$$

Тогда:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{FL}{c} \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подставив это выражение в (2) и приравняв прогибы $\Delta_1 = \Delta_2$, найдем жесткость упругих элементов:

$$c = \frac{EJ(n+1)(2n+1)}{2nL}.$$

Например, для $n = 3$: $c = 14EJ / 3L$.

Уравнения движения модели ленты рассчитаем из уравнений Лагранжа 2-го рода.

В качестве обобщенных координат выберем углы поворота φ_i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} + Q_i, \quad (i = 1 \dots n). \quad (3)$$

Здесь T – кинетическая энергия; Π – потенциальная энергия сил тяжести и упругости; Q – обобщенная сила, соответствующая силам аэродинамического давле-

$$T = \frac{m\ell^2}{2} \left[\frac{7}{3} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{4}{3} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{3} \dot{\varphi}_3^2 + 3\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \right].$$

В общем случае, когда система состоит из n стержней, кинетическую энергию рассчитаем по формуле

$$T = \frac{m\ell^2}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad (4)$$

$$\text{где } \alpha_{i,j} = \begin{cases} n - i + \frac{1}{3}; & i = j, \\ n - i - j + \frac{3}{2}; & i \neq j. \end{cases}$$

Потенциальную энергию сил упругости и тяжести найдем по выражению

ния воздуха.

Кинетическая энергия первого стержня (O_1O_2) в случае однородной ленты примет вид:

$$T_1 = \frac{m\ell^2}{2} \left(\frac{1}{3} \dot{\varphi}_1^2 \right),$$

где $m, \ell = L/3, \dot{\varphi}_1$ – соответственно масса стержня O_1O_2 , а также его длина и угловая скорость.

Скорость центра масс второго стержня определим, найдя ее проекции на оси координат:

$$V_{C2x} = \dot{\varphi}_1 \ell \cos \varphi_1 + 0,5 \dot{\varphi}_2 \ell \cos \varphi_2;$$

$$V_{C2y} = \dot{\varphi}_1 \ell \sin \varphi_1 + 0,5 \dot{\varphi}_2 \ell \sin \varphi_2.$$

Тогда, воспользовавшись формулой для кинетической энергии при плоскопараллельном движении, получим

$$T_2 = \frac{m\ell^2}{2} \left[\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{3} \dot{\varphi}_2^2 \right].$$

Аналогично найдем кинетическую энергию третьего стержня, а затем и кинетическую энергию системы для случая $n = 3$:

$$\Pi = \frac{1}{2} c \sum_{i=1}^n (\varphi_i - \varphi_{i-1})^2 + mg\ell \sum_{i=1}^n b_i (1 - \cos \varphi_i), \quad (5)$$

где $b_i = 2 - i + n/2$.

Для определения обобщенной силы, соответствующей силе аэродинамического давления на ленту воздушных потоков, сделаем следующее допущение – лента движется под действием стационарного воздушного потока, в каждой точке которого скорость частиц воздуха направлена вертикально вниз.

Дадим системе возможное перемещение, при котором $\delta\varphi_1 > 0$, а $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = 0$.

В этом случае стержень 1 повернется на угол $\delta\varphi_1$, а стержни 2 и 3 переместятся поступательно и система займет положение $O_1O'_2O'_3O'_4$ (рис. 2).

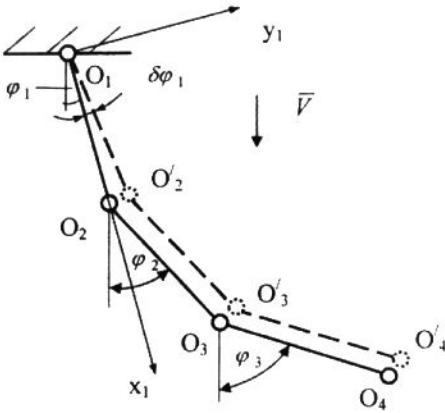


Рис. 2

Свяжем с каждым из стержней оси $x_i y_i$, которые начинаются в точке O_i и направлены соответственно по стержню с номером i и перпендикулярно ему. На рис. 2 показаны только оси координат, связанные

$$\begin{aligned} V_{ry2} &= -(V \sin \varphi_2 + \ell \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + x_2 \dot{\varphi}_2), & V_{rx2} &= V \cos \varphi_2 - \ell \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ V_{ry3} &= -(V \sin \varphi_3 + \ell \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + \ell \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + x_3 \dot{\varphi}_3), \\ V_{rx3} &= V \cos \varphi_3 + \ell \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \ell \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Обобщенную силу найдем как отношение работы сил аэродинамического давления на данном возможном перемещении к этому перемещению. При этом учтем, что при отрицательных углах поворота стержней силы аэродинамического давления совершают положительную работу.

Поскольку силы аэродинамического

$$Q_1 = -\alpha \left\{ \lambda_1 \int_0^\ell x_1 V_{ry1}^2 dx_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \int_0^\ell \left[\cos(\varphi_i - \varphi_1) V_{ryi}^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha} \sin(\varphi_i - \varphi_1) V_{rxi}^2 \right] dx_i \right\}.$$

Проведя интегрирование, запишем

$$\begin{aligned} Q_1 = -\alpha \left\{ \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \lambda_1 \left[\left(\ell \dot{\varphi}_1 + \frac{4}{3} b_1 \right)^2 + \frac{2}{9} b_1^2 \right] + \frac{\ell^2}{3} \sum_{i=2}^n \lambda_i \cos(\varphi_i - \varphi_1) \left[\left(\ell \dot{\varphi}_1 + \frac{3}{2} b_i \right)^2 + \frac{3}{4} b_i^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1}{\alpha} \ell^2 \sum_{i=2}^n \sin(\varphi_i - \varphi_1) V_{rxi}^2 \right\}, \end{aligned}$$

с первым стержнем.

Выделим на стержне O_1O_2 элементарный отрезок длиной dx_1 на расстоянии x_1 от точки O_1 . Скорость воздушного потока относительно этого элемента найдем из теоремы о сложении скоростей при сложном движении:

$$\bar{V} = \bar{V}_{e1} + \bar{V}_{r1}, \quad (6)$$

где \bar{V} – скорость набегающего потока воздуха; \bar{V}_{e1} – переносная скорость (скорость элементарного отрезка стержня 1); \bar{V}_{r1} – скорость воздушного потока относительно элементарного отрезка.

Проектируя равенство (6) на оси x_1 и y_1 , получим

$$V_{ry1} = -(V \sin \varphi_1 + x_1 \dot{\varphi}_1), \quad V_{rx1} = V \cos \varphi_1.$$

Рассуждая аналогично, на втором и третьем участках будем иметь:

давления пропорциональны квадрату относительной скорости, то их проекции на оси координат каждого из стержней будут:

$$F_{cyi} = \alpha V_{ryi}^2, \quad \text{а} \quad F_{cxi} = \alpha_1 V_{rxi}^2.$$

В результате

где $\lambda_i = \text{sign}(\varphi_i)$; $i = 1, \dots, n$.

Аналогично получим остальные обобщенные силы:

$$b_i = V \sin \varphi_i + \sum_{j=1}^{i-1} \ell \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_i - \varphi_j).$$

$$Q_k = -\alpha \left\{ \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \lambda_1 \left[\left(\ell \dot{\varphi}_k + \frac{4}{3} b_k \right)^2 + \frac{2}{9} b_k^2 \right] + \frac{\ell^2}{3} \sum_{i=k+1}^n \lambda_i \cos(\varphi_i - \varphi_k) \left[\left(\ell \dot{\varphi}_i + \frac{3}{2} b_i \right)^2 + \frac{3}{4} b_i^2 \right] + \frac{\alpha_1}{\alpha} \ell^2 \sum_{i=k+1}^n \sin(\varphi_i - \varphi_k) V_{rxi}^2 \right\}. \quad (7)$$

Подставив (4), (5) и (7) в (3), получим уравнения движения ленты. Например, для $n = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{14}{3} \ddot{\varphi}_1 + 3\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + 3\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) = \\ = \frac{2}{m\ell^2} \left[c(-2\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{5}{2} mg\ell \sin \varphi_1 + Q_1 \right], \\ 3\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{8}{3} \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - 3\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = \\ = \frac{2}{m\ell^2} \left[c(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) - \frac{3}{2} mg\ell \sin \varphi_2 + Q_2 \right], \\ \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{2}{3} \ddot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = \\ = \frac{2}{m\ell^2} \left[c(\varphi_2 - 2\varphi_3) - \frac{1}{2} mg\ell \sin \varphi_3 + Q_3 \right]. \end{aligned}$$

Данная система дифференциальных уравнений является нелинейной и может быть решена численными методами.

ВЫВОДЫ

Получены уравнения, описывающие движение дискретной модели волокнистой ленты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Разин С.Н., Пашин Е.Л. Патент на изобретение №2178022. Устройство для штапелирования льняного волокна в ленте. – Опубл. 2002. Бюл. № 1.

Рекомендована кафедрой теории механизмов и сопротивления материалов. Поступила 22.09.04.