УДК 677.021

КОНФИГУРАЦИЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ВОЛОКОН

А.Ф. КАПИТАНОВ, Е.В. ПАВЛЮЧЕНКО

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

В частном случае по результатам, полученным в [1], равновесная конфигурация может быть линейной, то есть центры всех элементарных отрезков в положениях равновесия могут лежать на одной прямой. Тогда эта прямая может быть выбрана в качестве одной из осей координат, например оси O'_z .

В этом случае координаты $x_{\alpha e}$ и $y_{\alpha e}$ для любого элементарного отрезка равны нулю и последнее уравнение в системе [(13) 1] обращается в тождество. В указанной системе остается только пять первых условий, накладывающих ограничения на координаты x_α, y_α, z_α. Следовательно, при линейной равновесной конфигурации для определения произвольной деформированной конфигурации элементарного отрезка необходимо n = 3К-5 независимых переменных $R_1, \ldots, R_n$, через которые могут быть выражены 3К координат x_α, y_α, z_α.

Если равновесная конфигурация задана, то есть заданы векторы $r_{\alpha w}$ (или координаты $x_{\alpha w}$, $y_{\alpha w}$, $z_{\alpha w}$), то произвольная неравновесная конфигурация волокна на основании уравнения [(1) 1] может быть определена смещениями отдельных элементарных отрезков из положений равновесия или изменениями координат Δx_α, Δy_α, Δz_α по сравнению с их равновесными значениями. При этом на К векторов Δr_α будут наложены условия [(6) 1] и [(9) 1] или, если перейти к скалярным величинам, на 3К приращений координат Δx_α, Δy_α, Δz_α будут наложены условия

$$
\begin{aligned}
&\sum m_\alpha \Delta x_\alpha = 0,\\
&\sum m_\alpha \Delta y_\alpha = 0,\\
&\sum m_\alpha \Delta z_\alpha = 0,\\
&\sum m_\alpha (y_{\alpha e}\Delta z_\alpha - z_{\alpha e}\Delta y_\alpha) = 0,\\
&\sum m_\alpha (z_{\alpha e}\Delta x_\alpha - x_{\alpha e}\Delta z_\alpha) = 0,\\
&\sum m_\alpha (x_{\alpha e}\Delta y_\alpha - y_{\alpha e}\Delta x_\alpha) = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Можно ввести n = 3К – 6 (в случае линейной равновесной конфигурации n = 3К-5) линейно независимых функций смещений Δx_α, Δy_α, Δz_α :

$$F_i(\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, \ldots, \Delta x_K, \Delta y_K, \Delta z_K)=q_i \qquad i=1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

В таком случае, присоединяя к системе уравнений (2) шесть уравнений (1) и разрешая полученную систему относительно Δx_α, Δy_α, Δz_α , можно выразить 3К смещения элементарных отрезков из положений через n независимых величин $q_1, \ldots, q_n$:

$$
\begin{aligned}
\Delta x_\alpha &= \Delta x_\alpha(q_1, \ldots, q_n),\\
\Delta y_\alpha &= \Delta y_\alpha(q_1, \ldots, q_n),\\
\Delta z_\alpha &= \Delta z_\alpha(q_1, \ldots, q_n).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Следовательно, произвольная неравновесная конфигурация волокна может быть описана как с помощью n переменных $R_1, \dots, R_n$, введенных выше, так и с помощью n переменных $q_1, \dots, q_n$, и параметров, определяющих равновесную конфигурацию волокна. Оба описания могут быть однозначно связаны, если в качестве функций f_i выбрать, например, ΔF_i :

$$f_i = \sum_{\alpha}\left\{\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_\alpha}\right)_e \Delta x_\alpha + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_\alpha}\right)_e \Delta y_\alpha + \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_\alpha}\right)_e \Delta z_\alpha\right\} = \Delta F_i . \quad (4)$$

Тогда из определений R_i [(14) 1] и q_i (2) следует:

$$Q_i=R_i-R_{iw},\ \ R_i=R_{iw}+q_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

где R_{iw} – значения параметров $R_1, \dots, R_n$, определяющие равновесную конфигурацию элементарных отрезков.

Таким образом, в уравнениях [(2) 1] x_α, y_α, z_α можно выразить через параметры $R_1, \dots, R_n$ с помощью соотношений [(15)1].

Координаты x_α, y_α, z_α в уравнениях (2) можно выразить и через $q_1, \dots, q_n$ в выражении [(2) 1], представив в виде

$$x_\alpha=x_{\alpha e} + \Delta x_\alpha(q_1, \dots, q_n), \qquad y_\alpha = \Delta y_\alpha(q_1, \dots, q_n),$$
$$z_\alpha = z_{\alpha e} + \Delta z_\alpha(q_1, \dots, q_n), \qquad \alpha = 1, 2, \dots, K \quad (6)$$

на основании уравнений (3).

Введение координат $x_{O'}$, $y_{O'}$, $z_{O'}$, Θ, φ, χ и $R_1, \dots, R_n$ (или $q_1, \dots, q_n$) вместо координат x_α, y_α, z_α позволяет описать отдельно движение центра масс волокна относительно внешней системы координат (координаты $x_{O'}$, $y_{O'}$, $z_{O'}$), вращение волокна как целого относительно той же системы координат (координаты Θ, φ, χ) и колебания элементарных отрезков относительно положений равновесия (параметры $R_1, \dots, R_n$ или $q_1, \dots, q_n$).

Определим вид функции потенциальной энергии для малых смещений элементарных отрезков из положения равновесия, то есть для малых деформаций волокна. .

Функции $V(R_1, \dots, R_n)$ и $U(R_1, \dots, R_n)$ по определению связаны уравнением

$$V(R_1,\dots,R_n)=V(R_{1w}+q_1,\dots,R_{nw}+q_n). \quad (7)$$

В частности, в минимуме V имеют место соотношения

$$V_w=V(R_{1w},\dots,R_{nw})=U(0,\dots,0)=U_w , \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial R_i}\right)_w = \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_w = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial R_i \partial R_j}\right)_w = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_w = k_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

При рассмотрении малых смещений элементарных отрезков функции V и U обычно раскладываются в ряд по смещениям элементарных отрезков от положений равновесия.

Для функции U такое разложение будет

$$U(q_1,...,q_n) = U_e + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_w + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_w q_i q_j + \dots . \quad (11)$$

Все первые производные от U до q_i равны нулю, так как они относятся к минимуму U . Поэтому (11) можно переписать в виде

$$U(q_1, \dots , q_n)=U_e + U(q_1, \dots , q_n),$$

где

$$U(q_1,...,q_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} q_i q_j + \dots , \quad (12)$$

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_w = \left(\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j}\right)_w .$$

Таким образом, потенциальная энергия волокна как функция координат $q_1, \dots , q_n$ определяется матрицей коэффициентов упругости k_{ij}:

$$U_q = \left\| k_{ij} \right\| . \quad (13)$$

Силы, соответствующие координатам q_1 по определению, будут

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_j ,\ i = 1,2,...,n.$$

Выразив из этих уравнений q_1, получим

$$q_i = -\sum_{j=1}^{n} C_{ij} F_j , \qquad i=1, 2, \dots , n.$$

Тогда потенциальную энергию U можно представить как функцию сил F_i в виде

$$U = \sum_i q_i \sum_j k_{ij} q_q = -\sum_i F_i = \sum_{i,j} C_{ij} F_i F_j . \quad (14)$$

Потенциальная энергия U как функция сил F_i будет определяться матрицей коэффициентов влияния C_{ij}, то есть матрицей

$$U_F = \left\| C_{ij} \right\| . \quad (15)$$

Для двухзвенной конфигурации смещения элементарного отрезка из положений равновесия определяются одним параметром:

$$Q = R - R_e = r - r_e, \quad (16)$$

равным изменению расстояния между элементарными отрезками по сравнению с равновесным. Поэтому для двухзвенной конфигурации формулы (12) или (14) принимают вид

$$U(q)=1/2kq_2,\ U(F)=1/2C_eF^2+\dots, \quad (17)$$

где

$$k_e = \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)_e , \quad C_e = \left(\frac{\partial^2}{\partial F^2}\right)_e .$$

ВЫВОДЫ

1. Получены аналитические выражения, позволяющие описать движение центра масс волокна относительно внешней системы координат, перемещение волокна как целого относительно той же системы и изменение положений элементарных отрезков относительных положений равновесия.

2. Установлено, что потенциальная энергия волокна определяется матрицей коэффициента упругости элементарных отрез-

ков и координатами их концов.

3. Конфигурация волокна позволяет судить о силовом воздействии на волокна, например, в процессе чесания, и оценить эффективность модификации их свойств с целью снижения обрывности волокон.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капитанов А.Ф., Павлюченко Е.В.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2002, №6. С.33...36.

Рекомендована кафедрой технологии шерсти. Поступила 05.06.02.