УДК 677.024

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СТРОЕНИЯ ТКАНИ

С.Г. СТЕПАНОВ, Г.В. СТЕПАНОВ

(Ивановская государственная архитектурно-строительная академия, Ивановская государственная текстильная академия)

Взаимодействие в ткани жестких на изгиб нитей можно описать системой уравнений [1]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2}{dz^2}\left(E_o I_o \frac{d^2 U}{dz^2}\right) - \frac{d}{dz}\left[Q_o(z)\frac{dU}{dz}\right] + kU = q_o(q, P, M), \\ &\frac{d^2}{dz_1^2}\left(E_y I_y \frac{d^2 V}{dz_1^2}\right) - \frac{d}{dz_1}\left[Q_y(z_1)\frac{dV}{dz_1}\right] + k_1 V = q_y(q, P, M), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где $q_o(q, P, M)$ и $q_y(q, P, M)$ – обобщенные внешние нагрузки, приложенные к основной и уточной нитям; E_o, E_y – модули упругости основной и уточной нитей; I_o, I_y – моменты инерции сечений нитей основы и утка; Q_o, Q_y – осевые силы, растягивающие основную и уточную нить; k, k_1 – коэффициенты при соответствующих ординатах.

Точное решение (1) вряд ли возможно, поэтому целесообразно показать одно из направлений решения подобной задачи. Необходимо получить уравнение осевой линии нити. Воспользуемся степенным рядом. Для того, чтобы получить искомую функцию, необходимо взять число слагаемых ряда на единицу больше числа граничных условий [1]. В нашем случае запишем

$$U = a_o + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^4, \qquad (2)$$

где ε – безразмерная координата, соответствующая интервалу $0 \le \varepsilon \le 1$; a_i – коэффициенты ряда.

Функцию (2) можно использовать, когда она удовлетворяет граничным условиям

$$U(0) = U(1) = 0, \qquad (3)$$
$$U'(0) = U'(1) = 0. \qquad (4)$$

Найдем коэффициенты полинома (2). На основании [1] принимаем $a_4 = 1$. Учитывая (3), имеем

$$\text{при } \varepsilon = 0 \quad a_o = 0, \qquad (5)$$
$$\text{при } \varepsilon = 1 \quad a_1 + a_2 + a_3 + 1 = 0. \qquad (6)$$

Подставим (5) и (6) в (2):

$$U = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \varepsilon^4. \qquad (7)$$

Продифференцируем (7):

$$U' = a_1 + 2a_2\varepsilon + 3a_3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3. \qquad (8)$$

На основании (4):

$$\text{при } \varepsilon = 0 \quad a_1 = 0,$$
$$\text{при } \varepsilon = 1 \quad 2a_2 + 3a_3 + 4 = 0. \qquad (9)$$

Учитывая (6), где $a_1 = 0$, а также (9), запишем систему

$$\left.\begin{aligned} a_2 + a_3 + 1 &= 0, \\ 2a_2 + 3a_3 + 4 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Из (10) следует

$$a_2 = 1; \quad a_3 = -2.$$

Подставим значения коэффициентов в (7):

$$U = a_k\left(\varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 + \varepsilon^2\right), \qquad (11)$$

где a_k – параметр [1], определяющий в нашем случае амплитуду изгиба нити и зависящий от силового взаимодействия нитей основы и утка в ткани.

Функцию (11) примем за основу при решении задачи прогиба нити. Дополнительно проверим ее на экстремум. Первая производная в точке $\varepsilon/2$ должна равняться нулю. Эта точка соответствует максимальной высоте изгиба нити в ткани и кривая в этой точке меняет свое направление:

$$U'(\varepsilon/2) = a_k\left(4\cdot\frac{1}{16} - 6\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{4}\right) = 0.$$

Производная в точке перегиба равна нулю. Следовательно, функция (11) удовлетворяет необходимым требованиям и ее можно использовать при получении математической модели строения ткани.

Аналогичную функцию запишем и для нити утка:

$$V = a_n\left(\varrho^4 - 2\varrho^3 + \varrho^2\right), \qquad (12)$$

где ϱ – безразмерная координата; a_n – параметр, требующий определения.

Задачу решаем для малых прогибов нити. Это приведет к определенным ошибкам, однако для нашего случая они будут незначительны.

Тогда систему (1) запишем так:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{A}_o \frac{d^4\tilde{U}}{d\varepsilon^4} - \overset{*}{Q}_o \frac{d^2\tilde{U}}{d\varepsilon^2} - \overset{*}{q}_o(P_\varepsilon) = 0, \\ \overset{*}{A}_y \frac{d^4\tilde{V}}{d\varrho^4} - \overset{*}{Q}_y \frac{d^2 V}{d\varrho^2} - \overset{*}{q}_y(P_\varrho) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

где $\overset{*}{A}_o, \overset{*}{A}_y$ – жесткость на изгиб основной и уточной нитей; $\overset{*}{q}_o(P_\varepsilon), \overset{*}{q}_y(P_\varrho)$ – сосредоточенные внешние силы.

В (13):

$$\varepsilon \approx z, \varrho \approx z_1.$$

В системе (13) показатели приводятся в безразмерной форме.

Найдем уравнение силового равновесия основной нити, воспользовавшись первым уравнением системы (13). Из (11) следует

$$\tilde{U}'' = 2a_k(6\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 1),$$
$$\tilde{U}^{IV} = 24a_k.$$

Тогда

$$24\overset{*}{A}_o a_k - 2\overset{*}{Q}_o a_k(6\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 1) - \overset{*}{q}_o(P_\varepsilon) = 0. \quad (14)$$

Аналогичное уравнение получим и для уточной нити. Вычислив вторую и четвертую производные от (12) и используя второе уравнение системы (13), запишем

$$24\overset{*}{A}_y a_n - 2\overset{*}{Q}_y a_n(6\varrho^2 - 6\varrho + 1) - \overset{*}{q}_y(P_\varrho) = 0. \quad (15)$$

Решения (14) и (15) осуществляем, используя принцип возможных перемещений. Для этого необходимо подобрать функцию возможных обобщенных перемещений точек осевой линии нити. Наиболее приемлемые будут функции, подобные (11) и (12):

$$\delta\tilde{U} = \varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 + \varepsilon^2, \quad (16)$$
$$\delta\tilde{V} = \varrho^4 - 2\varrho^3 + \varrho^2. \quad (17)$$

Для дальнейшего решения задачи необходимо вычислить интеграл [1]:

$$\int_0^1 L(y)\delta y d\tau, \quad (18)$$

где $L(y)$ – уравнение равновесия нити (14) или (15); δy – возможные обобщенные перемещения точек осевой линии нити.

Учитывая (14)...(18), запишем

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 \left[24\overset{*}{A}_o a_k - 2\overset{*}{Q}_o a_k(6\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 1) - \overset{*}{q}_o(P_\varepsilon)\right](\varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 + \varepsilon^2)d\varepsilon = 0, \\ \int_0^1 \left[24\overset{*}{A}_y a_n - 2\overset{*}{Q}_y a_n(6\varrho^2 - 6\varrho + 1) - \overset{*}{q}_y(P_\varrho)\right](\varrho^4 - 2\varrho^3 + \varrho^2)d\varrho = 0. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Или

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1\left[24\overset{*}{A}_o a_k-2\overset{*}{Q}_o a_k\left(6\varepsilon^2-6\varepsilon+1\right)\right]\delta U d\varepsilon=\int_0^1\overset{*}{q}_o\left(P_\varepsilon\right)\delta U d\varepsilon,\\ \int_0^1\left[24\overset{*}{A}_y a_n-2\overset{*}{Q}_y a_n\left(6\varrho^2-6\varrho+1\right)\right]\delta V d\varrho=\int_0^1\overset{*}{q}_y\left(P_\varrho\right)\delta V d\varrho.\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

Из (20) следует

$$a_k=\frac{\int_0^1\overset{*}{q}_o\left(P_\varepsilon\right)\delta U d\varepsilon}{0{,}8\overset{*}{A}_o+0{,}02\overset{*}{Q}_o},\tag{21}$$

$$a_n=\frac{\int_0^1\overset{*}{q}_y\left(P_\varrho\right)\delta V d\varrho}{0{,}8\overset{*}{A}_y+0{,}02\overset{*}{Q}_y}.\tag{22}$$

Применительно к саржe 3/2 имеем

$$\int_0^1\overset{*}{q}_o\left(P_\varepsilon\right)\delta U d\varepsilon=0{,}1325\overset{*}{P}_\varepsilon,\tag{23}$$

$$\int_0^1\overset{*}{q}_y\left(P_\varrho\right)\delta V d\varrho=0{,}1325\overset{*}{P}_\varrho.\tag{24}$$

Тогда

$$a_k=\frac{0{,}1325\overset{*}{P}_\varepsilon}{0{,}8\overset{*}{A}_o+0{,}02\overset{*}{Q}_o},\tag{25}$$

$$a_n=\frac{0{,}1325\overset{*}{P}_\varrho}{0{,}8\overset{*}{A}_y+0{,}02\overset{*}{Q}_y},\tag{26}$$

где $\overset{*}{P}_\varepsilon$ и $\overset{*}{P}_\varrho$ – силы взаимодействия основной нити с уточной в области их контакта.

Подставляем (25) и (26) в (11) и (12):

$$U=\frac{0{,}1325\overset{*}{P}_\varepsilon}{0{,}8\overset{*}{A}_o+0{,}02\overset{*}{Q}_o}\left(\varepsilon^4-2\varepsilon^3+\varepsilon^2\right),\tag{27}$$

$$V=\frac{0{,}1325\overset{*}{P}_\varrho}{0{,}8\overset{*}{A}_y+0{,}02\overset{*}{Q}_y}\left(\varrho^4-2\varrho^3+\varrho^2\right).\tag{28}$$

Учитывая, что максимальный прогиб будет в середине основного или уточного перекрытия при $\varepsilon=\varrho=1/2$ и, перейдя к размерным величинам, получим

$$h_o=\frac{1{,}66P_\varepsilon}{P_y\left(2{,}5A_oP_y^2+Q_o\right)},\tag{29}$$

$$h_y=\frac{1{,}66P_\varrho}{P_o\left(2{,}5A_yP_o^2+Q_y\right)},\tag{30}$$

где h_o, h_y – высоты волн изгиба нитей основы и утка; P_o, P_y – фактические плотности ткани по основе и утку.

Обозначим

$$D_o=P_o\left(2{,}5A_yP_o^2+Q_y\right),\tag{31}$$

$$D_y=P_y\left(2{,}5A_oP_y^2+Q_o\right).\tag{32}$$

Используя (29...32) и то, что сумма высот волн изгиба нитей в ткани равна сумме диаметров этих нитей, с учетом равенства сил в области контакта нити с нитью, запишем систему, которая позволяет определить параметры строения ткани переплетения саржа 3/2:

$$\left.\begin{aligned}h_o&=\frac{1{,}66}{D_y}Q_o,\\ h_y&=\frac{1{,}66}{D_o}Q_y,\\ h_o+h_y&=d_o\eta_{ов}+d_y\eta_{ув},\\ Q_o&=Q_y.\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

Из (33) следует

$$h_o=\frac{D_o\left(d_o\eta_{ов}+d_y\eta_{ув}\right)}{D_o+D_y},\tag{34}$$

$$h_y = \frac{D_y\left(d_o\eta_{ов} + d_y\eta_{ув}\right)}{D_o + D_y}, \qquad (35)$$

где $\eta_{ов}$ и $\eta_{ув}$ – коэффициенты вертикального смятия нитей.

Приведем расчет опытной технической ткани из комплексных нитей СВМ: P_o = =300 н/дм; P_y = 200 н/дм; $d_o = d_y = 0,2$ мм; $A_o = A_y = 0,01$ Н·мм^2; $Q_o = 0,3$Н; Q_y = = 0,25 Н. Коэффициенты вертикального смятия нитей учитывать не будем. Имеем, мм: $h_o = 0,277$; $h_y = 0,123$. Ткань соответствует примерно VI порядку фазы строения.

ВЫВОДЫ

Предложена методика применения степенных функций при решении задачи прогиба нити в ткани и на ее основе сделан расчет отдельных показателей, характеризующих строение ткани.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Светлицкий В.А.* Механика гибких стержней и нитей. – М.: Машиностроение, 1978. С.33…61.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 19.05.03.