УДК 677-486.2:539.311

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКРУЧЕННЫХ НИТЕЙ*

В. П. ЩЕРБАКОВ, И. Б. ЦЫГАНОВ, В. А. ЗАВАРУЕВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина)

Составим суммы моментов относительно осей x_1, y_1, z_1 (некоторые геометрические пояснения даны на рис. 1):

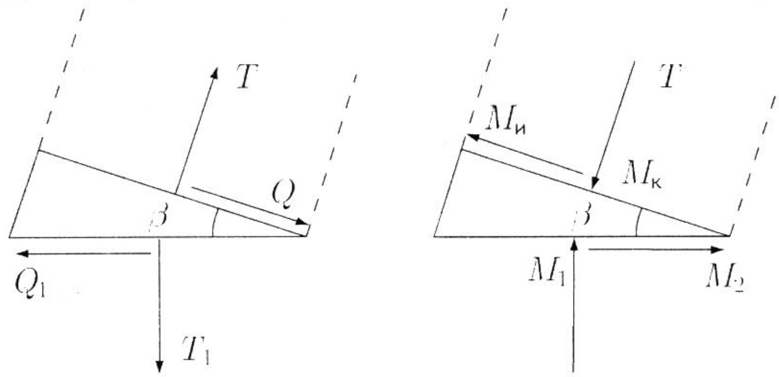

Рис. 1

$$
\begin{aligned}
M_{O_1x_1} &= M_1 - Q_1R(1-\cos\varphi) + \int_0^x qR\sin(\varphi-\psi)d\xi,\\
M_{O_1y_1} &= M_2\cos\varphi + Q_1x\sin\varphi - T_1R(1-\cos\varphi) - \int_0^x q(x-\xi)\cos(\varphi-\psi)d\xi, \qquad (1)\\
M_{O_1z_1} &= M_2\sin\varphi - Q_1x\cos\varphi + T_1R\sin\varphi - \int_0^x q(x-\xi)\sin(\varphi-\psi)d\xi.
\end{aligned}
$$

Интегрируя с учетом выражений [1 (2)] и $x = R\varphi\mathrm{ctg}\beta$, получим

$$
\begin{aligned}
M_{O_1x_1} &= M_1 - Q_1R(1-\cos\varphi) + qR^2\mathrm{ctg}\beta(1-\cos\varphi),\\
M_{O_1y_1} &= M_2\cos\varphi + Q_1x\sin\varphi - T_1R(1-\cos\varphi) - qR^2\mathrm{ctg}^2\beta(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi - 1), \qquad (2)\\
M_{O_1z_1} &= M_2\sin\varphi - Q_1x\cos\varphi + T_1R\sin\varphi - qR^2\mathrm{ctg}^2\beta(\sin\varphi - \varphi\cos).
\end{aligned}
$$

---

* Окончание. Начало см. в № 3 за 2003г.

Как и для сил, потребуем, чтобы $M_{O_1x_1} = M_1$, $M_{O_1y_1} = M_2$, $M_{O_1z_1} = 0$. Тогда наряду с условием [1 (4)] появляется дополнительное условие равновесности крученой нити:

$$M_2 = qR^2 ctg^2\beta - T_1 R. \qquad (3)$$

Что касается момента M_1, то он легко находится из условия равновесия [1, рис.2]:

$$M_1 = Q_1 R. \qquad (4)$$

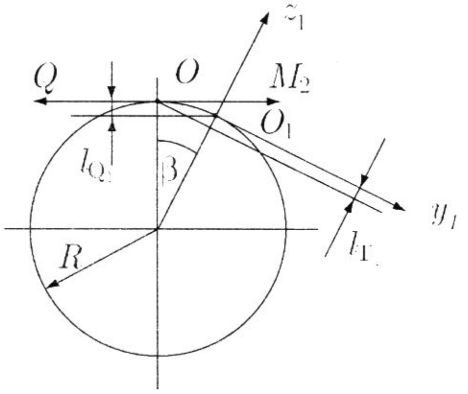

Рис. 2

Найдем теперь возникающие в сечениях, перпендикулярных оси каждой из нитей, изгибающий момент $M_и$, крутящий момент $M_к$, натяжение T и перерезывающую силу Q.

Для этого рассмотрим равновесие сил и моментов, действующих на элемент нити, выделенный сечениями, нормальными к оси крученой нити и к оси отдельной нити (рис. 2).

Из условий равновесия сил следует

$$T = Q_1 \sin\beta + T_1 \cos\beta,$$
$$Q = Q_1 \cos\beta - T_1 \sin\beta. \qquad (5)$$

Из условий равновесия моментов получаем

$$M_и = M_2 \cos\beta - M_1 \sin\beta,$$
$$M_к = M_1 \cos\beta + M_2 \sin\beta. \qquad (6)$$

Принимая во внимание соотношения [1 (4)] и (3), (4) запишем выражения для сил и моментов, действующих в сечении нити:

$$T = q_0 R + T_1 \cos\beta, \quad Q = q_0 R ctg\beta - T_1 \sin\beta,$$
$$M_и = q_0 R^2 (ctg^2\beta - 1) - T_1 R \cos\beta, \quad M_к = 2q_0 R^2 ctg\beta - T_1 R \sin\beta. \qquad (7)$$

Здесь введена приведенная к осевой линии нити контактная нагрузка q_0, равная

$$q_0 = q \cos\beta. \qquad (8)$$

Нами были найдены соотношения, основанные на пропорциональности компонентов кривизны и кручения при деформировании компонентам главного момента внутренних усилий: крутящий момент $M_к = GI_p к_1$, изгибающий момент $M_и = EIк_3$.

Используя известные кручение $к_1 = \dfrac{\sin\beta\cos\beta}{R}$ и кривизну $к_3 = \dfrac{\sin^2\beta}{R}$ винтовой линии, перепишем моменты в виде

$$M_и = EI\frac{\sin^2\beta}{R}, \quad M_к = GI_p \frac{\sin\beta\cos\beta}{R}. \qquad (9)$$

Подставим сюда значения изгибающего и крутящего моментов из двух последних равенств (7):

$$q_0 R^2 (ctg^2\beta - 1) - T_1 R \cos\beta = EI\frac{\sin^2\beta}{R},$$
$$2q_0 R^2 ctg^2\beta - T_1 R \sin\beta = GI_p \frac{\sin\beta\cos\beta}{R}. \qquad (10)$$

Из второго соотношения найдем величину контактной нагрузки:

$$q_0 = \frac{T_1}{2R}\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} + GI_p\frac{\sin^2\beta}{2R^3}. \quad (11)$$

Исключим из первого равенства (10) q_0 и определим усилие T_1, которое обеспечивает равновесность крученой нити при заданном угле β. Обозначив $e = \frac{EI}{GI_p}$, получим

$$T_1 = \frac{GI_p\left[1 - 2\sin^2\ \beta(1+e)\right]\cos\beta}{R^2}. \quad (12)$$

Отдельные нити в составе крученой имеют различные жесткости. Следовательно, для того, чтобы получить прямолинейную форму оси крученой нити, в зону скручивания двух нитей надо подавать нити с различным натяжением, пропорциональным их величинам жесткости при изгибе и кручении.

Рассмотрим теперь, как частный случай, взаимодействие нитей после процесса скручивания. В нашем распоряжении имеется текстильный продукт, предназначенный для переработки в трикотажном, ткацком и других производствах. Внешние силы, включая осевую силу T_1, и моменты отсутствуют. Равновесная структура с прямолинейной осью крученой нити возможна только при условии равных жесткостей скручиваемых нитей, то есть нити должны быть одинаковыми. Тогда из (10) имеем

$$\begin{aligned} q_0R^2(\mathrm{ctg}^2\beta - 1) &= EI\frac{\sin^2\beta}{R}, \\ 2q_0R^2\mathrm{ctg}^2\beta &= GI_p\frac{\sin\beta\cos\beta}{R}. \end{aligned} \quad (13)$$

Исключим отсюда q_0 и получим $\mathrm{ctg}^2\beta - 1 = \frac{2EI}{GI_p}$. С учетом ранее введенного обозначения жесткостей запишем

$$\mathrm{tg}\beta = \sqrt{\frac{1}{1+2e}}. \quad (14)$$

Из (11) при $T_1 = 0$ следует

$$q_0 = GI_p\frac{\sin^2\beta}{2R^3}. \quad (15)$$

С учетом предыдущего соотношения (14) и формулы $\sin^2\beta = \frac{\mathrm{tg}^2\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta}$ найдем выражения для основных силовых факторов, определяющих равновесную структуру крученой нити:

$$q_0 = GI_p\frac{1}{4R^3(1+e)}, \quad (16)$$

$$T = GI_p\frac{1}{4R^2(1+e)}, \quad (17)$$

$$Q = GI_p\frac{\sqrt{1+2e}}{4R^2(1+e)}, \quad (18)$$

$$M_и = EI\frac{1}{2R(1+e)}, \quad (19)$$

$$M_к = GI_p\frac{\sqrt{1+2e}}{2R(1+e)}. \quad (20)$$

Последние формулы приведены также и в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков В.П., Цыганов И.Б., Заваруев В.А.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №3. С.91…94.

2. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука. 1996.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 03.04.03.