

УДК 677.021.16

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА СМЕШИВАНИЯ**

*А.Д. СЕМЕНОВ, В.В. ВОЛКОВ*

(Пензенский технологический институт)

В многокамерных смешивающих машинах эффект смешивания достигается благодаря разности скоростей выпуска материала из камер или разности высот наполнения камер смешиваемым материалом при постоянной скорости выпуска. Оценка смешивающей способности обоих типов машин может быть проведена на основе их динамических характеристик, в качестве которых можно рассматривать временные или частотные характеристики [1]. Таким образом, смешивающая способность машины будет определяться, во-первых, динамическими характеристиками входных сигналов машины, под которыми будем подразумевать изменение производительности смешиваемых компонентов на входе машины, во-вторых, – динамическими характеристиками самой машины.

Реальный процесс смешивания сопровождается изменением массы  $M$  волокна и производительности  $Q$  смешивающей машины, а следовательно, и изменением ее постоянной времени, то есть смешивающая машина является динамическим звеном с переменными параметрами. Однако, учитывая, что постоянная времени меняется значительно медленнее, чем производительность на входе, смешивающую машину можно рассматривать как квазистационарную систему [2].

С учетом допущений о квазистационарности постоянной времени и равенства входной и выходной производительности машины найдем, как влияют ее параметры на динамические характеристики.

Пусть известны длина  $L$ , ширина  $B$  и высота  $H$  машины, а также задана ее производительность:  $Q=Q_{вх}=Q_{вых}$  и масса  $M$  материала, находящегося в ней. Производительность отдельной  $i$ -й камеры обозначим через  $Q_i$ .

Если теперь на вход машины подать только один компонент, то за счет разного времени пребывания волокна в камерах на выходе машины сформируется переходная характеристика (рис. 1).

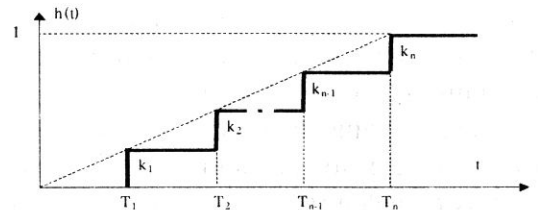


Рис. 1

Относительная производительность  $i$ -й камеры будет равняться:

$$k_i = \frac{Q_i}{Q} \tag{1}$$

Время продвижения материала к выходу  $i$ -й камеры обозначим через  $T_i$ .

Очевидно, что приращение переходной характеристики  $\Delta h_i$  за время  $\Delta t_i = T_i - T_{i-1}$  можно записать как

$$\frac{\Delta h_i}{\Delta t_i} = \frac{k_i}{T_i - T_{i-1}} \tag{2}$$

Выразим  $k_i$  через заданные параметры

машины, используя (1) и принимая во внимание, что

$$Q_i = \frac{M_i}{T_i} \quad (3)$$

Тогда, подставляя (3) в (1) и учитывая, что  $Q = \frac{M}{T}$ , будем иметь

$$\Delta\tau_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{T}, \quad \Delta x = \frac{\Delta\ell}{L}, \quad h_i = \frac{H_i}{H}, \quad v_i = \frac{H_i}{T_i}.$$

Устремляя  $\Delta\ell$  к нулю, преобразуем (5) к виду

$$\tau\omega(\tau) \frac{d\tau}{dx} = h(x), \quad (6)$$

$\omega(\tau)$  – нормированная по постоянной времени  $T$  функция веса машины.

Для получения наибольшей постоянной времени  $T$  машины при заданной производительности, то есть для улучшения процесса смешивания, необходимо, чтобы в машине находилось как можно больше материала. Это условие выполняется, если правая часть (6) будет максимальной:

$$\int_0^{T_m} \tau(t)\omega(t)dt = \max. \quad (7)$$

Дополняя этот функционал условием нормирования функции веса:

$$\int_0^{T_m} \omega(t)dt = 1, \quad (8)$$

получим вариационную задачу (7) для вычисления переходной характеристики  $h(t)$  с дополнительным условием в виде изопериметрического ограничения (8).

Функция Лагранжа для (7), (8) принимает вид

$$k_i = \frac{TH_i\Delta\ell}{HLT_i}, \quad (4)$$

где  $H_i$  – высота материала в  $i$ -й камере;  $\Delta\ell$  – длина камеры.

Подставим (4) в (2) и перейдем к относительным величинам:

$$\frac{\Delta h_i}{\Delta\tau_i} = \frac{v_i\Delta x_i}{\Delta\tau_i}, \quad (5)$$

$$L = \tau(t)\dot{h}(t) + \lambda\dot{h}(t) \quad (9)$$

и имеет решение

$$\omega(t) = 1, \quad (10)$$

что дает линейную переходную характеристику.

Передаточная функция машины в этом случае будет выглядеть:

$$W(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{pT}. \quad (11)$$

Такая передаточная функция позволяет полностью подавить переменные составляющие на периодах частоты кратных постоянной времени машины. Следовательно, если выполнить условие кратности постоянной времени смешивающей машины и времени прохода питателя над ставкой кип в прямом и обратном направлении, можно получить идеальное смешивание.

Рассмотрим теперь случай, когда число камер смесовой машины конечно и равно  $n$ . В этом случае передаточная функция машины будет иметь несколько другой вид по сравнению с (11). Для определения передаточной функции машины рассмотрим ее структурную схему (рис.2).

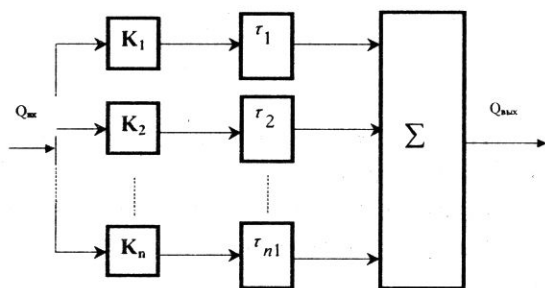


Рис. 2

Каждая камера машины представлена в виде последовательного соединения пропорционального звена и звена чистого запаздывания. Коэффициент  $k_i$  показывает, какую долю производительности машины составляет производительность  $i$ -го бункера. Величину коэффициента  $k_i$  можно вычислить по формуле (1).

Если считать, что имеет место установившийся режим работы смешивающей

машины, то величину запаздывания  $\tau_i$  можно определить так:

$$\tau_i = \frac{H_i}{V_i}, \quad (12)$$

где  $H_i$  – высота материала и  $V_i$  – скорость движения материала в  $i$ -й камере.

На основании структурной схемы на рис. 2 определим передаточную функцию:

$$W(p) = \sum_{i=1}^n k_i e^{-p\tau_i}. \quad (13)$$

Отметим, что передаточная функция (13) соответствует передаточной функции импульсного или цифрового фильтра.

Зная передаточную функцию, вычислим и амплитудно-частотную характеристику смешивающей машины:

$$A(\omega) = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n k_i \cos(\omega\tau_i) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^n k_i \sin(\omega\tau_i) \right]^2}. \quad (14)$$

Для машины с разной длиной пути проходимого материалом и одинаковыми скоростями выпуска коэффициенты  $k_i$  будут одинаковыми и равными

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = \frac{1}{n}. \quad (15)$$

Величина запаздывания  $\tau_i$  составит

$$\tau_i = T \frac{i}{n}. \quad (16)$$

Это следует из дифференциального уравнения (6):

$$\omega(\tau) \frac{d\tau}{dx} = \frac{h}{\tau} = v - \text{const}, \quad (17)$$

откуда непосредственно следуют (15) и (16).

С учетом этих условий выражение для АЧХ такой машины будет выглядеть:

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{\left[ \cos\left(i \frac{\omega T}{n}\right) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^n \sin\left(i \frac{\omega T}{n}\right) \right]^2}}{n}. \quad (18)$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^n \cos(ix) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n \sin(ix) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad (20)$$

окончательно имеем

$$A(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{n \sin\left(\frac{\omega T}{2n}\right)}, \quad (21)$$

где  $T$  – постоянная времени машины.

Очевидно, что при  $n \rightarrow \infty$ , АЧХ такой машины будет стремиться к АЧХ смешивающей машины с бесконечно большим числом бункеров:

$$A(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{n \sin\left(\frac{\omega T}{2n}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}. \quad (22)$$



Рис. 3

На рис. 3 показаны нормированные АЧХ машин различного типа, рассчитанные по формуле (14). На рис. 4 приведены

Такой машине соответствует передаточная функция (11).

Аналогично для машины с одинаковой длиной пути проходимого материалом и разными скоростями выпуска передаточная функция и АЧХ могут вычисляться по формулам (13) и (14).

Для расчета коэффициентов  $k_i$  и  $\tau_i$  воспользуемся также уравнением (6). При  $h=1$  и  $\omega(\tau)=1$ , решая это уравнение при нулевых начальных условиях, найдем, что  $\tau = 2\sqrt{x}$ , или с учетом конечного числа бункеров:

$$\tau_i = 2\sqrt{\frac{i}{n}}. \quad (23)$$

Откуда, учитывая (4):

$$k_i = \frac{1}{n\tau_i}. \quad (24)$$

Так же  $n \rightarrow \infty$ , АЧХ такой машины будет стремиться к АЧХ смешивающей машины с бесконечно большим числом бункеров. Необходимо иметь в виду, что постоянная времени машины с одинаковой длиной пути проходимого материалом и разными скоростями выпуска будет в два раза больше, что следует из (23).

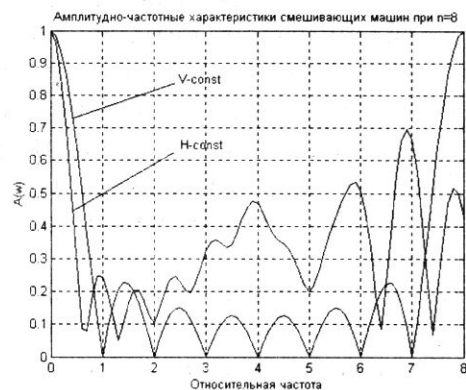


Рис. 4

те же характеристики при числе бункеров  $n = 8$ .

## ВЫВОДЫ

1. На основе допущения о квазистационарности процесса смешивания получено дифференциальное уравнение этого процесса.

2. Определена оптимальная переходная характеристика смешивающей машины, удовлетворяющая условию максимизации постоянной времени, и найдены передаточные функции смешивающих машин различного типа; рассчитаны их динамические характеристики.

3. Определено условие "идеального" смешивания при питании смешивающей машины от кипного питателя, заключающееся в соблюдении кратности постоянной времени смешивающей машины и времени прохода питателя над ставкой кип в прямом и обратном направлениях.

4. В результате сравнения амплитудно-частотных характеристик смешивающих машин различного типа (рис.4)

установлено, что смешивающая машина с постоянной скоростью выпуска ( $V = \text{const}$ ) обладает лучшей выравнивающей способностью в зоне высоких частот ( $\omega_0 > 1$ ) и худшей – в зоне низких, что объясняется меньшей постоянной времени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Динамика основных процессов прядения. – Ч. 3 // Гинзбург Л.Н., Хавкин В.П., Винтер Ю.М., Молчанов А.С., Мовшович П.М. – М.: Легкая индустрия, 1976.

2. Семенов А. Д. О влиянии неравномерности высоты волокна в камерах модульной смешивающей машины на эффективность смешивания // Межвуз. сб. науч. тр.: Новое в прядении натуральных и химических волокон. – М.: МТИ, 1990. С.10...12.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 23.12.01.