УДК 517.91:539.219.1

УСТОЙЧИВОСТЬ БЫСТРОВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ ТЕКСТИЛЬНОГО ОБОРУДОВАНИЯ

STABILITY OF RAPID ROTATING TEXTILE MACHINERY SHAFTS

В.А. ГОРДОН, Е.В. ОСОВСКИХ
V.A. GORDON, E.V. OSOVSKIH

(Приокский государственный университет, Юго-Западный государственный университет)
(Prioksky State University, South-West State University)
E-mail: ttp@ivgpu.com

Решена задача аналитического определения критической частоты потери устойчивости вращающегося упругого стержня с переменными вдоль оси изгибной жесткостью и плотностью материала при различных вариантах условий опирания. Постановка задачи позволяет оценить влияние гироскопического эффекта на критические частоты.

The problem of the analytical determination of the critical frequency of loss of stability of a rotating elastic rod with variable axial bending stiffness and density of the material in different types of support conditions. Statement of the problem allows us to estimate the effect of the gyroscopic effect on the critical frequencies.

Ключевые слова: вал, частота вращения, устойчивость, гироскопический эффект.

Keywords: shaft , rotation frequency, stability, gyroscopic effect.

Конструкции легкого и текстильного машиностроения характеризуются сложностью кинематики, повышенными скоростями взаимодействующих элементов, значительными динамическими нагрузками, в основном циклического характера, и тяжелыми условиями круглосуточной эксплуатации.

Качество продукции этих отраслей находится в прямой зависимости от качества оборудования, особенно от надежности обеспечения требуемого пространственного положения и уровня деформируемости элементов конструкций. Поэтому учет различных факторов, формирующих перемещения и деформации одного из главных элементов текстильных машин – быстровращающегося вала, является актуальной и практически значимой задачей.

В настоящей работе рассматривается проблема потери устойчивости вращающегося с постоянной угловой скоростью ω упругого стержня с переменной вдоль оси x жесткостью $EJ = EJ(x)$ и плотностью материала $\rho = \rho(x)$.

На выпученный в результате потери устойчивости стержень действует распределенная центробежная сила интенсивностью $\omega^2\rho(x)A(x)w(x)$, а также распределенный изгибающий момент интенсивностью $\omega^2\rho(x)J(x)w'(x)$, обусловленный гироскопическим эффектом (ГЭ). Здесь обозначены: $w = w(x)$ – прогиб вала, $A = A(x)$ и $J = J(x)$ – соответственно площадь и момент инерции поперечного сечения вала, штрих означает дифференцирование по x.

Используя известные дифференциальные соотношения между внутренними силовыми факторами и интенсивностями внешних нагрузок при изгибе стержней, получим уравнение равновесия в виде:

$$M''(x) + \omega^2\left\{\left[\rho(x)J(x)w'(x)\right]' + \rho(x)A(x)w(x)\right\} = 0, \qquad (1)$$

где $M = M(x)$ – изгибающий момент,

$$M(x) = -E(x)J(x)w''(x). \qquad (2)$$

Исключая из уравнения (1) момент $M(x)$ с помощью представления (2), сводим задачу к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка с переменными коэффициентами относительно функции прогибов $w = w(x)$:

$$\left[E(x)J(x)w''(x)\right]'' - \omega^2\left[\rho(x)J(x)w'(x)\right]' - \omega^2\rho(x)A(x)w(x) = 0. \qquad (3)$$

Введением безразмерных параметров и функций

$$\xi = \frac{x}{\ell},\ W = \frac{w}{\ell},\ G = \frac{EJ}{E_*J_*},\ S = \frac{\rho A}{\rho_*A_*},\ R = k\frac{\rho J}{\rho_*J_*},\ k = \left(\frac{i_*}{\ell}\right)^2,$$

где ℓ – длина стержня; $E_*, \rho_*, A_*, J_*, i_*$ – некоторые характерные значения соответственно модуля упругости, плотности материала, площади, момента и радиуса инерции поперечного сечения стержня, уравнение (3) приводится к виду:

$$\left[G(\xi)W''(\xi)\right]'' - p^2\left\{\left[R(\xi)W'(\xi)\right]' - S(\xi)W(\xi)\right\} = 0, \qquad (4)$$

где $p = \omega\ell^2\sqrt{\frac{\rho_*A_*}{E_*J_*}}$ – безразмерный параметр частоты вращения. Функции $G = G(\xi)$, $S = S(\xi)$, $R = R(\xi)$ с разных сторон характеризуют неоднородность стержня: $G(\xi)$ – переменную вдоль оси ξ

жесткость, $S(\xi)$ – плотность, $R(\xi)$ – влияние гироскопического эффекта.

Аналитический метод интегрирования уравнений типа (2) в отсутствии члена, содержащего функцию $R = R(\xi)$, то есть способ построения решения данной задачи без учета ГЭ, представлен, например, в работах [1], [2].

Используя несколько модифицированный подход, общее решение уравнения (4) будем искать в виде:

$$W(\xi) = \sum C_j W_j(\xi), \qquad (5)$$

где $C_j\,(j = \overline{1,4})$ – произвольные константы;

$$W_j(\xi) = f_j(\xi) + \int H(\xi, z)\tilde{g}_j(z) f_j(z)\,dz + \sum^{\infty} \int H(\xi, z)\left[\int \rho^{(n)}(z, \eta)\tilde{g}_j(\eta) f_j(\eta)\,d\eta\right] dz \;-$$

фундаментальная система решений уравнения (4), $P^{(n)}$ – n-я итерация ядра:

$$P(\xi, z) = -\frac{\tilde{g}_1(\xi) f_1(\xi)}{f_1(z)} + \frac{\tilde{g}_2(\xi) f_2(\xi)}{f_2(z)} - i\left[\frac{\tilde{g}_3(\xi) f_3(\xi)}{f_3(z)} - \frac{\tilde{g}_4(\xi) f_4(\xi)}{f_4(z)}\right],$$

$$H(\xi, z) = -\frac{f_1(\xi)}{f_1(z)} + \frac{f_2(\xi)}{f_2(z)} - i\left[\frac{f_3(\xi)}{f_3(z)} - \frac{f_4(\xi)}{f_4(z)}\right],$$

$$f_1(\xi) = g(\xi)\delta_3(\xi)\exp(m_1(\xi, 0)), \qquad f_2(\xi) = g(\xi)\delta_3(\xi)\exp(-m_1(\xi, 0)),$$

$$f_3(\xi) = g(\xi)\delta_1(\xi)\exp(im_3(\xi, 0)), \qquad f_4(\xi) = g(\xi)\delta_1(\xi)\exp(-im_3(\xi, 0)),$$

$$g(\xi) = S^{-3/8}(\xi) G^{-1/8}(\xi)\alpha^{-1/2}(\xi), \qquad \delta_j(\xi) = \left[\alpha(\xi) + \varepsilon_j^2 \cdot \gamma(\xi)\right]^{-1/4},$$

$$m_j(\xi) = \int_0^{\xi} b_j(\xi)\,d\xi, \qquad b_j(\xi) = \beta(\xi)\delta_j^{-2}(\xi), \qquad \alpha(\xi) = \left[1 + \gamma^2(\xi)\right]^{1/2},$$

$$\beta(\xi) = p^2\left[\frac{S(\xi)}{G(\xi)}\right]^{1/4}, \qquad \gamma(\xi) = \frac{R(\xi)}{pS^{1/2}(\xi) G^{1/2}(\xi)}, \qquad \tilde{g}_j(\xi) = \frac{g_j(\xi)}{4G(\xi)\beta^3(\xi)},$$

$$g_j(\xi) = K(\xi) + \varepsilon_j L(\xi) + \varepsilon^2{}_j T(\xi), \qquad K(\xi) = \frac{(G(\xi) q''(\xi))''}{q(\xi)},$$

$$L = G\beta\left[\frac{G''}{G}\left(\frac{\beta'}{\beta} + 2\frac{q'}{q}\right) + \frac{G'}{G}\left(6\frac{q''}{q} + 2\frac{\beta''}{\beta} + 6q\frac{q'\beta'}{g\beta}\right) + 4\frac{q'''}{q} + \frac{\beta'''}{\beta} + 6q\frac{q''\beta'}{g\beta} + 4\frac{q'\beta''}{q\beta}\right],$$

$$T = G\beta^2\left[\frac{G''}{G} + 6\frac{G'}{G}\left(\frac{\beta'}{\beta} + \frac{q'}{q}\right) + 6\frac{q''}{q} + 12\frac{q'\beta'}{q\beta} + 3\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2 + 4\frac{\beta''}{\beta}\right],$$

$$\varepsilon_1 = 1,\; \varepsilon_2 = -1,\; \varepsilon_3 = i,\; \varepsilon_4 = -i \text{ (корни уравнения } \varepsilon^4 = 1).$$

Располагая общим решением для прогибов (5), последовательным дифференцированием можно получить остальные кинематические и силовые факторы задачи: углы поворота поперечных сечений $W'(\xi)$, изгибающие моменты $M(\xi)$ и поперечные силы $Q(\xi)$, необходимые в дальнейшем для формулировки граничных условий.

Ниже представлены результаты для трех вариантов опирания: стержень с защемленными концами, консоль и шарнирное опирание концов. Стандартная процедура удовлетворения граничным условиям приводит к трансцендентным частотным уравнениям вида:

1) защемленные концы

$$\left[\frac{a(0)}{a(1)}+\frac{a(1)}{a(0)}\right]\text{chm}_1(1,0)\cos m_3(1,0)+\left[a(0)a(1)-\frac{1}{a(0)a(1)}\right]\text{shm}_1(1,0)\sin m_3=2,$$

2) консоль

$$\left[a(0)a^3(1)+\frac{1}{a(0)a^3(1)}\right]\text{chm}_1(1,0)\text{cosm}_3(1,0)+\left[\frac{a(0)}{a^3(1)}\ \frac{a^3(1)}{a(0)}\right]\text{shm}_1(1,0)\text{sinm}_3(1,0)=2,$$

3) шарнирное опирание концов

$$\sin m_3(1,0)=0,$$

где обозначено $a(\xi)=\left[\alpha(\xi)-\gamma(\xi)\right]^{1/2}$.

Рассмотрен ряд примеров:

1) стержень с защемленными концами круглого поперечного сечения, диаметр которого изменяется вдоль оси по линейному закону

$$S(\xi)=\left[1-(1-r)\xi\right]^2,$$
$$G(\xi)=\left[1-(1-r)\xi\right]^4,$$
$$R(\xi)=k\left[1-(1-r)\xi\right]^4;$$

2) стержень постоянной жесткости с защемленными концами, плотность которого изменяется по линейному закону

$$S(\xi)=1-(1-r)\xi,$$
$$G(\xi)=1,$$
$$R(\xi)=k\left[1-(1-r)\xi\right];$$

3) стержень постоянной жесткости с защемленными концами, плотность которого изменяется по косинусоидальному закону

$$S(\xi)=1+\mu\cos 2\pi\xi,$$
$$G(\xi)=1,$$
$$R(\xi)=k\left[1+\mu\cos 2\pi\xi\right],$$

где r – параметр конусности (отношение диаметров концевых сечений), $\mu=\frac{\rho_a}{\rho_m}$, ρ_a – амплитудное значение плотности; ρ_m – среднее значение плотности.

Анализ полученных результатов показывает, что учет гироскопического эффекта при исследовании быстровращающихся валов влияет на критические частоты вращения в сторону их увеличения. Степень влияния в основном связана с номером рассматриваемой собственной частоты и параметром "k" функции неоднородности $R(\xi)$, характеризующим удлинение вала, то есть отношение характерного поперечного размера вала к его длине.

Так, влияние ГЭ снижается с ростом удлинения стержня. Например, для 3-й частоты однородного стержня при $k=17\cdot10^{-4}$ относительное изменение частоты, вследствие учета гироскопических сил, составляет 20,8%, при $k=9,8\cdot10^{-4}$ – 10,6% и при $k=6,25\cdot10^{-4}$ – 6,4%. Влияние ГЭ на основную частоту незначительно и не превышает 1%. Таким образом, при исследовании высоких частот неучет ГЭ приводит к существенным погрешностям. Для стержней переменной вдоль оси жесткости степень влияния ГЭ определяется характером функции $R(\xi)$: ее монотонное возрастание приводит к росту влияния ГЭ, монотонное убывание – к уменьшению. В частности, для 1-го случая при r = 1 и $k=17\cdot10^{-4}$ 3-я критическая частота вращения возрастает на 20,8%, а при r = 0,25 – всего на 5,8%. Для стержней постоянной жесткости и переменной плотности положение иное: при различных законах изменения плотности и при значительной неоднородности степень влияния ГЭ практически одинаковая. Так, во 2-м случае при $r = 1$ (однородный стержень) относительное изменение 3-й частоты при $k = 17 \cdot 10^{-4}$ составляет 20,8%, а при $r = 4$ – 20,9%.

Для оценки точности полученных собственных частот вращения использовался параметр

$$\Delta = \int_0^1 \frac{\left|W_j(\xi) - f_j(\xi)\right|}{\left|f_1(\xi)\right|} d\xi,$$

представляющий собой среднюю по длине стержня относительную ошибку между точными $W_j(\xi)$ и приближенными $f_j(\xi)$ частными решениями уравнения (4) [3]. Показано, что при различных законах изменения жесткости и плотности и при значительной степени неоднородности погрешность вычисленных частот не превышает 10%. Сильная неоднородность ухудшает точность результатов.

ВЫВОДЫ

Предложенный метод расчета критических скоростей быстровращающихся валов с переменными вдоль оси геометрическими и массовыми характеристиками позволяет количественно оценить гироскопический эффект при исследовании устойчивости неоднородных валов. Полученные аналитические решения показывают существенное влияние гироскопического эффекта на величины высших частот, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации соответствующего оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гордон В.А., Шоркин В.С.* Метод решения задач механики неоднородных тел. – Орел: ОрелГТУ, 2005.

2. *Гордон В.А., Пилипенко О.В.* Аналитические решения задач механики неоднородных тел. – LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2014.

3. *Гордон В.А.* Исследование свободных изгибных колебаний стержней трапециевидного продольного сечения // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – Нижегородский государственный ун-т. – 1988. С. 105...113.

REFERENCES

1. Gordon V.A., Shorkin V.S. Metod reshenija zadach mehaniki neodnorodnyh tel. – Orel: OrelGTU, 2005.

2. Gordon V.A., Pilipenko O.V. Analiticheskie reshenija zadach mehaniki neodnorodnyh tel. – LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2014.

3. Gordon V.A. Issledovanie svobodnyh izgibnyh kolebanij sterzhnej trapecievidnogo prodol'nogo sechenija // Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. – Nizhegorodskij gosudarstvennyj un-t. – 1988. S. 105...113.

Рекомендована кафедрой уникальных зданий и сооружений ЮЗГУ. Поступила 08.04.16.