

УДК 677.022:19.86

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДИНАМИКИ ИЗНОСА И СТАРЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
В УСЛОВИЯХ НОРМАЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ**

**A COMPUTER MODEL
OF CHANGE CHARACTERISTICS FIBROUS MATERIAL
IN THE TECHNOLOGICAL PROCESS**

В.В. МОНАХОВ, К.В. ОРДОВ, Т.А. САМОЙЛОВА, П.А. СЕВОСТЬЯНОВ
V.V. MONAKHOV, K.V. ORDOV, T.A. SAMOYLOVA, P.A. SEVOSTYANOV

(Московский государственный университет дизайна и технологии,
Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова)
(Moscow State University of Design and Technology,
Plekhanov Russian University of Economics)
E-mail: petrsev46@yandex.ru

В статье рассматривается процесс возникновения и развития нарушений в структуре и свойствах материала при его "естественном" износе и старении, представляемый в виде случайного вероятностного процесса "гибели – рождения". Для исследования процесса была разработана компьютерная имитационная модель динамики "появления – исчезновения" точечных дефектов. Модель позволяет исследовать влияние нарушений стационарности образования дефектов.

The article examines the appearance and development of disorders in the structure and properties of the material in its "natural" wear and aging, submitted in the form of a random stochastic process "the death – the birth." To study the process has developed a computer simulation model of dynamic process "appearance – disappearance" of point defects. The model allows to investigate the effect of disturbances stationary formation of defects.

Ключевые слова: износ, старение, дефекты, полимеры, компьютерная модель, марковская модель.

Keywords: wear, aging, defects, polymers, computer model, Markov model.

Рассматривается процесс возникновения и развития нарушений в структуре и свойствах материала при его "естественном" износе и старении. Далее будем гово-

рить об этих нарушениях как о "дефектах" в материале. Механизм процесса представляется следующим образом. В первоначально бездефектном образце материала

по тем или иным причинам возникают центры развития дефектов. При нормальных условиях эксплуатации причины дефектов весьма разнообразны и разнесены во времени. Отследить их практически невозможно. Поэтому возникновение дефектов можно рассматривать как случайный вероятностный процесс.

В однородном материале центры дефектов первоначально имеют минимальные (точечные) размеры и распределены равномерно по объему материала. Моменты возникновения дефектов образуют случайный ординарный поток событий, который можно описать моментами времени $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ или интервалами времени $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots\}$ между событиями. Возможна и "гибель" некоторых дефектов, означающая их исчезновение.

Описанный процесс весьма схож с известным процессом "гибели – рождения". Простейшая марковская модель такого процесса допускает аналитическое решение для вероятностей $p_n(t)$ числа n дефектов к определенному моменту времени t . Модель является марковской, если интервалы τ_n – независимые и экспоненциально распределенные случайные величины с одинаковыми параметрами распределения. Вероятности $p_n(t)$ в этом случае являются решениями системы линейных дифференциальных уравнений Колмогорова. Исследование аналитических методов решения этой системы и применения модели марковских процессов "гибели – рождения" для процессов старения изложены, например, в [1...3].

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_{01}p_0(t) + \lambda_{10}p_1(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= \lambda_{01}p_0(t) - (\lambda_{01} + \lambda_{12})p_1(t) + \lambda_{21}p_2(t), \\ &\dots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda_{n-1,n}p_{n-1}(t) - (\lambda_{n,n-1} + \lambda_{n,n+1})p_n(t) + \lambda_{n+1,n}p_{n+1}(t), \\ &\dots \end{aligned} \quad (1)$$

Для процессов без "гибели" (так называемых процессов "чистого размножения") уравнения А.Н. Колмогорова для вероятностей состояний (1) приобретают вид [4], [5].

При начальных условиях $p_0(0) = 1$; $p_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ решение системы (2) в изображениях по Лапласу приводится к свертке

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 p_0(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= -\lambda_1 p_1(t) + \lambda_0 p_0(t), \\ &\dots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= -\lambda_n p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t), \\ &\dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} P_0(s) &= \frac{1}{s + \lambda_0}, \\ P_n(s) &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{(s + \lambda_0)(s + \lambda_1) \dots (s + \lambda_n)}, \quad (3) \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

При равных интенсивностях возникновения дефектов $\lambda_0 = \dots = \lambda_n \dots$ вероятности числа дефектов к моменту t распределены по закону Пуассона:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda_0 t)^n}{n!} \exp(-\lambda_0 t) \quad (4)$$

со средним и дисперсией, равными $\lambda_0 t$.

Возможности аналитических методов являются весьма ограниченными. Поэтому более целесообразно перейти к разработке компьютерной имитационной модели, поз-

воляющей в рамках одного алгоритма имитации исследовать более широкий класс динамических процессов накопления дефектов при износе и старении материала.

Интервалы времени между появлениями новых дефектов и исчезновением уже существующих дефектов являются независимыми случайными величинами. Схематически динамика появления и исчезновения дефектов в материале изображена на рис.1. На рисунке τ_1, τ_2, \dots – интервалы времени от очередного события (появления нового дефекта или исчезновения существующего) до момента появления следующего дефекта; $\theta_1, \theta_2, \dots$ – интервалы времени от очередного события до исчезновения одного из существующих дефектов; $n(t)$ – число дефектов в материале на момент времени t .

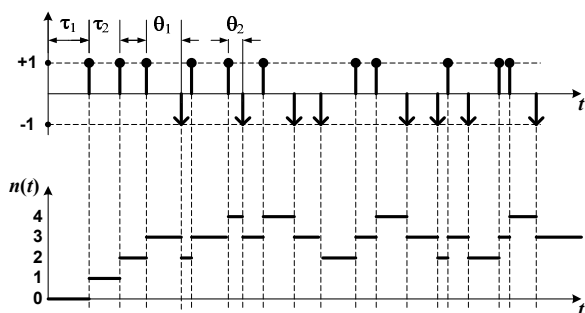


Рис. 1

Описанная схема возникновения и исчезновения дефектов известна в теории вероятностей как "задача о дискретном одномерном блуждании", "задача о разорении игрока", "задача о первом достижении границы". При определенных упрощающих предположениях эти задачи имеют аналитическое решение [1], [4]. Отличие рассматриваемой задачи о накоплении дефектов от перечисленных классических задач теории вероятности в том, что в ней не допускаются физически бессмысленные отрицательные значения числа дефектов, что блокируется соответствующим условием в приведенной ниже процедуре, реализующей алгоритм моделирования.

Предположим, что число одновременно присутствующих в материале дефектов не должно превышать предельное значение

N . Обозначим TauSr и TetaSr – средние значения случайных величин τ и θ .

На рис. 2 приведены четыре реализации накопления числа дефектов $n(t)$, полученные с помощью приведенной модели при одних и тех же стартовых условиях: $\text{TauSr} = 5$ ед., $\text{TetaSr} = 10$ ед., $N = 20$ дефектов, интервалы распределены по экспоненциальному закону. Видно, что время накопления одного и того числа дефектов может сильно различаться в разных реализациях [6], [7]. Поэтому для использования результатов моделирования следует получить достаточно надежные оценки распределения этого времени и изучить зависимость этого распределения от особенностей моделирования.

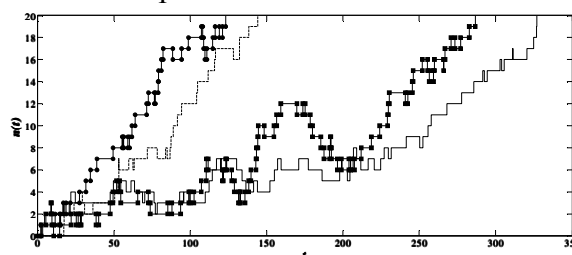


Рис. 2

Предварительную числовую оценку можно получить исходя из следующих соображений. Допустим, что к моменту T число дефектов в материале достигло N . Число дефектов, появившихся за это время, обозначим np , а исчезнувших nm . Тогда $N = np - nm$, а среднее время на появление этих дефектов можно представить выражением $T = np \cdot \text{TauSr} + nm \cdot \text{TetaSr}$. Решение этих двух уравнений относительно np и nm при $T > N \cdot \text{TauSr}$:

$$\begin{aligned} nm &= \frac{T - N \cdot \text{TauSr}}{\text{TauSr} + \text{TetaSr}}, \\ np &= \frac{T + N \cdot \text{TetaSr}}{\text{TauSr} + \text{TetaSr}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Например, если $\text{TauSr} = 5$ ед., $\text{TetaSr} = 10$ ед., то чтобы к моменту времени $T = 2500$ ед. в материале присутствовало $N = 50$ дефектов, за это время должно было появиться $np = 200$ и $nm = 150$ из них должно исчезнуть.

Для оценки распределения времени накопления N дефектов было выполнено $N_{\text{prov}} = 10000$ повторных независимых прогонов модели. Накопленные значения T позволили получить оценки распределения этих значений. Гистограмма значений T приведена на рис.3. С применением ин-

$$f(T) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi T^3}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2 T}(T-\mu)^2\right\} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi T^3}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu}\left(\frac{T}{\mu}-2+\frac{\mu}{T}\right)^2\right\}, \quad T > 0. \quad (6)$$

Здесь μ – математическое ожидание T ; μ^3 / λ – дисперсия T ; μ / λ – квадрат коэффициента вариации T .

Это распределение возникает при моделировании последовательности случайных шагов, например, в моделях броуновского движения или задачах последовательного контроля Вальда. Например, рассмотрим последовательность независимых шагов за фиксированные интервалы времени dt со случайными независимыми скоростями v_j . Тогда смещение $S(N)$ точки за N шагов будет равно сумме:

$$S(N) = dt \sum_{j=1}^N v_j. \quad (7)$$

Очевидно, что распределение смещения $S(N)$ можно найти через характеристические функции распределения v_j . В силу центральной предельной теоремы при большом числе шагов смещение $S(N)$ распределено по нормальному закону. Изменим схему и будем считать, что смещения точки на каждом шаге одинаковы ds , а затраты времени на шаг равны $dt_j = ds / v_j$. Тогда суммарные затраты времени на N шагов равны:

$$T(N) = ds \sum_{j=1}^N \frac{1}{v_j}. \quad (8)$$

В этом случае распределение $T(N)$ зависит от распределения величин, обратных скоростям на каждом шаге. Заметим, что величины скоростей v_j должны содержать детерминированную составляющую V_j . Она должна быть одного знака и достаточ-

струментария *dffitool* пакета *Matlab* было установлено, что по критерию максимального правдоподобия гистограмма наилучшим образом соответствует так называемому инверсному Гауссову распределению (распределению Вальда) с функцией плотности вероятности:

но большой, чтобы значения dt_j были не только всегда одного знака, но и не содержали больших значений (при v_j , близких к нулю). Если случайные составляющие скоростей распределены по нормальному закону, то распределение $T(N)$ является инверсным Гауссовым распределением.

Вполне естественно, что именно это распределение оказалось наилучшей аппроксимацией полученных модельных данных. Кривая функции плотности вероятности (*InvNormDistr*) показана на рис. 3.

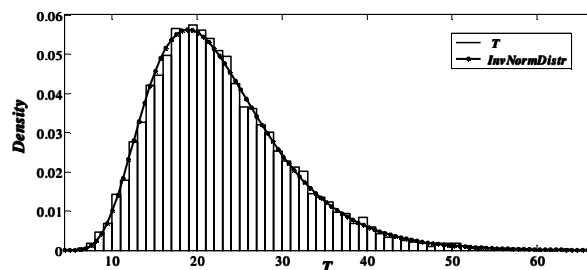


Рис. 3

Оценки параметров распределения: $\lambda = 179,36$ со среднеквадратической ошибкой 2,54; $\mu = 22,88$ со среднеквадратической ошибкой 0,08. Оценки среднего и дисперсии: $T_{\text{sr}} = 22,88$; $S^2 T = 66,81$. Большой разброс значений T показывает, что при прогнозировании сроков старения материала ориентироваться только на числовые характеристики, например, среднее значение, было бы ошибкой.

ВЫВОДЫ

Предложена простая компьютерная модель динамики развития дефектов в однородном однородном материале в нор-

мальных условиях эксплуатации. Установлен закон распределения времени накопления предельно допустимого числа дефектов. Показано, что статистический разброс данных по отдельным выборкам велик, что не допускает использования при прогнозировании только усредненных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – В 2-х томах / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.
2. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1971.
3. *Севостьянов П.А., Забродин Д.А.* Моделирование изменения функциональности специальных тканей с использованием теории надежности // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2010, №8. С.96...99.
4. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Советское Радио, 1977.
5. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. – М.: Советское Радио, 1972.
6. *Севостьянов П.А., Забродин Д.А.* Моделирование потери свойств текстильных материалов как задача теории надежности // Химические волокна. – 2009, №2. С. 102...104.
7. *Севостьянов П.А., Забродин Д.А.* Модель потери функциональности технических материалов

при их износе // ЭНИ "Технологии 21 века в легкой промышленности". – 2011, №5.

REFERENCES

1. Feller V. Vvedenie v teoriiu veroyatnostej i ee prilozhenija. – V 2-h tomah / Per. s angl. – M.: Mir, 1984.
2. Karlin S. Osnovy teorii sluchajnyh processov / Per. s angl. – M.: Mir, 1971.
3. Sevost'janov P.A., Zabrodin D.A. Modelirovanie izmenenija funkcional'nosti special'nyh tkanej s ispol'zovaniem teorii nadezhnosti // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2010, №8. S.96...99.
4. Tihonov V.I., Mironov M.A. Markovskie processy. – M.: Sovetskoe Radio, 1977.
5. Ventcel' E.S. Issledovanie operacij. – M.: Sovetskoe Radio, 1972.
6. Sevost'janov P.A., Zabrodin D.A. Modelirovanie poteri svojstv tekstil'nyh materialov kak zadacha teorii nadezhnosti // Himicheskie volokna. – 2009, №2. S. 102...104.
7. Sevost'janov P.A., Zabrodin D.A. Model' poteri funkcional'nosti tehniceskikh materialov pri ih iznose // JeNI "Tehnologii 21 veka v legkoj promyshlennosti". – 2011, №5.

Рекомендована кафедрой автоматизированных систем обработки информации и управления МГУДТ. Поступила 08.04.16.