УДК 624.04

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ И ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПО КОНТУРУ ПЛАСТИНОК

DETERMINATION OF STIFFNESS AND FUNDAMENTAL FREQUENCY OF OSCILLATIONS OF FIXED CIRCUIT PLATES

А.В. КОРОБКО, С.Ю. САВИН, С.А. ФИЛАТОВА
A.V. KOROBKO, S.YU. SAVIN, S.A. FILATOVA

(**Приокский государственный университет, Юго-Западный государственный университет**)
(**Oka State University, South-West State University**)
E-mail: ankor.66@mail.ru, suwin@yandex.ru, fortina2008@mail.ru

В статье показано, что различные интегральные физико-механические характеристики пластинок (F) для разных видов их деформирования (поперечный прогиб, колебания и устойчивость пластинок) взаимосвязаны между собой. Поэтому при проведении прочностных и деформационных

расчетов строительных конструкций можно по найденному значению F, относящемуся к какому-либо виду деформирования, находить соответствующие значения F, относящиеся к другим видам деформирования без решения сложных дифференциальных уравнений.

The article shows that the different physical and mechanical integral characteristics of the plates (F) for different types of deformation (transverse deflection, vibrations and stability of plates) are interconnected. Therefore, when we carrying out strength and deformation calculations of structures, the F value, which related with any kind of deformation, can be found on the corresponding F value, which related with other type of deformation. It excepts solving of difficult differential equations.

Ключевые слова: пластинки, расчеты на прочность, колебания и устойчивость, функциональная взаимосвязь интегральных физико-механических характеристик.

Keywords: plates, strength calculations, vibrations and stability, functional relationship between physical and mechanical integral characteristics.

При проектировании несущих и ограждающих конструкций производственных зданий и сооружений предприятий текстильной промышленности особое внимание уделяется расчету этих конструкций из условий статической и динамической прочности, жесткости и устойчивости. В современной проектной практике каждый из этих расчетов осуществляется в отдельности, без учета возможной взаимосвязи между основными интегральными физическими характеристиками (ИФХ) рассчитываемых конструкций. Как показали наши исследования, большинство ИФХ (максимальные прогибы, частоты собственных колебаний, критические силы при потере устойчивости) для конструкций каждого определенного вида (балки, плиты, фермы и их комбинации) взаимосвязаны. Целью настоящей статьи является иллюстрация функциональной связи между указанными параметрами на примере пластинок (плит).

Коэффициент формы. Выберем внутри произвольной выпуклой области D точку "a" и опустим из этой точки перпендикуляр h на касательную, проведенную к переменной точке контура области (рис. 1 – выпуклая форма области).

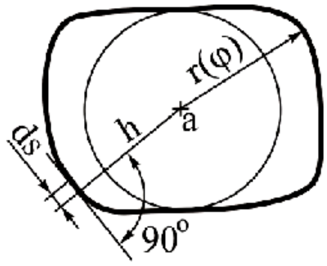


Рис. 1

Интеграл по контуру заданной фигуры:

$$K_f = \min \oint_L \frac{ds}{h}, \qquad (1)$$

где ds – линейный элемент контура области, является количественной характеристикой формы области и называется коэффициентом формы [1].

Приведем без вывода некоторые формулы для определения коэффициента формы [1]:

прямоугольник

$$K_f = 4(a/b + b/a),$$

где a и b – стороны прямоугольника;

произвольный треугольник

$$K_f = 2\mathrm{ctg}(\alpha/2)\mathrm{ctg}(\beta/2)\mathrm{ctg}(\gamma/2),$$

где α, β, γ – внутренние углы треугольника;

эллипс

$$K_f = \pi(a/b + b/a),$$

где a и b – полуоси эллипса.

Прямоугольная шарнирно опертая пластинка под косинусоидальной нагрузкой. Пусть нагрузка q(x,y) распределена по поверхности пластинки согласно закону косинуса. Тогда прогиб пластинки определяется из выражения [2]:

$$w = \frac{q_0}{D}\frac{1}{\pi^4(1/a^2 + 1/b^2)^2}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}, \quad (2)$$

где q_0 – интенсивность нагрузки в центре пластинки; D – цилиндрическая жесткость пластинки; a, b – ее размеры в плане.

После проведения необходимых преобразований имеем:

$$w = \frac{16q_0}{\pi^4 D}\frac{A^2}{K_f^2}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}. \quad (3)$$

С учетом выражения (3) получим следующие формулы для приведенного изгибающего и крутящего моментов:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{4q_0}{\pi^2}\frac{A}{K_f}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}, \\ M_{xy} &= 16q_0(1-\nu)\frac{A}{K_f}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Свободные колебания шарнирно опертой прямоугольной пластинки. Для определения собственных частот колебаний ω прямоугольных шарнирно опертых по сторонам пластинок известно точное решение [3]:

$$\omega = \pi^2\left(k^2/a^2 + n^2/b^2\right)\sqrt{D/m},$$

где k и n – количество полуволн пластинки соответственно вдоль сторон a и b. Основной частоте колебаний соответствует k=n=1:

$$\omega = \pi^2\left(1/a^2 + 1/b^2\right)\sqrt{D/m}.$$

Заменяя выражение, стоящее в скобках, на коэффициент формы прямоугольника, получим:

$$\omega = \left(\pi^2/4\right)\left(K_f/A\right)\sqrt{D/m}. \quad (5)$$

Устойчивость прямоугольной шарнирно опертой пластинки. Для случая равномерного всестороннего сжатия прямоугольной шарнирно опертой пластинки известно точное решение [4] для определения критического усилия N_0:

$$N_0 = \pi^2\left(k^2/a^2 + n^2/b^2\right)D. \quad (6)$$

Наименьшее значение критического усилия N_0 получается при k = n = 1. С учетом (6):

$$N_0 = \left(\pi^2/4\right)\left(K_f/A\right)D. \quad (7)$$

Анализ приведенных выше выражений позволяет сделать следующие выводы.

1. Максимальный прогиб, основная частота колебаний и критическое усилие при всестороннем равномерном сжатии прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластинки функционально связаны с ее коэффициентом формы K_f.

2. На основе первого вывода можно предположить, что и для других форм пластинок с однородными граничными условиями (шарнирное опирание или жесткое защемление по всему контуру) коэффициент формы будет являться основным аргументом в выражениях для интегральных физических характеристик, то есть:

$$w_0 = K_w \frac{qA^2}{K_f^2},$$

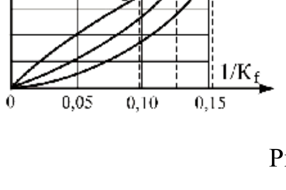
$$\omega = K_\omega \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{K_f}{A}, \qquad (8)$$

$$N_0 = K_N \frac{K_f}{A} D,$$

где K_w, K_ω, K_N – коэффициенты пропорциональности в соответствующих задачах строительной механики пластинок, зависящие от формы пластинок и вида граничных условий.

3. С учетом двух предыдущих выводов можно утверждать, что коэффициент формы является геометрическим аналогом интегральных физических характеристик в рассматриваемых задачах строительной механики пластинок. Это означает, что решение сложных двумерных физических задач, описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа четвертого порядка, может быть сведено к более простой геометрической задаче, связанной с анализом поведения коэффициента формы.

4. На основании последнего вывода с учетом свойства о двусторонней ограниченности всего множества значений коэффициента формы для областей с выпуклым контуром следует очень важная закономерность, которая носит фундаментальный характер: все множество интегральных физических характеристик F упругих изотропных пластинок с выпуклым контуром в рассматриваемых задачах теории пластинок, представленное в координатных осях F – K_f, ограничено с двух сторон.



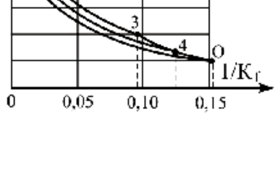


Рис. 2

Одну из границ (нижнюю или верхнюю) образуют эллиптические пластинки, другую (верхнюю или нижнюю) – пластинки в виде правильных фигур и равносторонних треугольников. Эта закономерность в обобщенном виде приведена на рис. 2 (граничные зависимости для всего множества пластинок с выпуклым контуром и однородными граничными условиями (показаны условно): а) $w_0 - 1/K_f$, б) $\omega - 1/K_f$).

Взаимосвязь задач поперечного изгиба и свободных колебаний пластинок. Специалистам в области проектирования строительных конструкций известно, что жесткость пластинок (максимальный прогиб) функционально связана с основной частотой их колебаний: чем жестче пластинка, тем выше ее частота колебаний. Однако до настоящего времени задачи поперечного изгиба и свободных колебаний пластинок не исследовались совместно во взаимосвязи соответствующих интегральных физических характеристик.

Рассмотрим произведение $w_0\omega^2$, воспользовавшись формулами (8):

$$w_0\omega^2 = K_w K_\omega^2 \, q/m = K\, q/m, \qquad (9)$$

где $K = K_w K_\omega^2$. Коэффициент пропорциональности K, как и коэффициенты K_w и K_ω, его образующие, зависит от формы области. А вот от вида граничных условий этот коэффициент может и не зависеть, поскольку физические характеристики w_0 и ω^2 находятся в соотношении обратной пропорциональности. На основе численного эксперимента это нами показано [5], [6], при этом получено двустороннее неравенство:

$$(4/\pi)(q/m) \le w_0\omega^2 \le (4/\pi)^2 (q/m), \qquad (10)$$

в котором левая часть неравенства обращается в равенство для бесконечно вытянутых пластинок (балок), а правое – для круглых пластинок. Неравенство (10) убедительно подтверждается исследованиями авторов [5], [6]. Кроме того, в этих публикациях получен важный вывод: для пластинок одинаковой формы, независимо от вида граничных условий (любая комбинация шарнирного опирания и жесткого защемления), произведение $K = \alpha\cdot\beta^4$ есть величина постоянная.

Графически установленная закономерность иллюстрируется рис. 2, из которого видно, что графики функций $w_0 - 1/K_f$ и $1/\omega^2 - 1/K_f$, будучи перемноженными, сливаются в одну линию (рис. 3 – зависимость $w_0\omega^2 - 1/K_f$ для всего множества пластинок с любыми граничными условиями), ординаты точек которой находятся в интервале от $4/\pi$ до $(4/\pi)^2$. На этом рисунке точка О соответствует круглой пластинке, точка 4 – квадратной, точка 3 – пластинке в виде правильного треугольника.

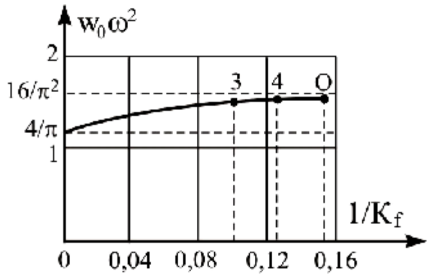


Рис. 3

Таким образом, установлена закономерность в теории пластинок, которая носит фундаментальный характер: для всего множества упругих изотропных пластинок с выпуклым контуром, постоянной толщины и произвольной формы, независимо от вида граничных условий, произведение максимального статического прогиба от действия равномерно распределенной нагрузки на квадрат основной частоты их колебаний в ненагруженном состоянии, представленное в координатных осях $w_0\omega^2 - K_f$, вырождается в асимптотическую кривую линию, максимальная ордината которой равна $(4/\pi)^2$ и соответствует круглым пластинкам, а минимальная ордината равна $4/\pi$ и соответствует бесконечно вытянутым пластинкам (балкам).

На основе этой закономерности неравенства (10) следует заменить функциональной зависимостью:

$$w_o\omega^2 = f(K_f)q/m, \qquad (11)$$

которую можно построить, обобщая все известные решения соответствующих задач теории пластинок, приводимых в научной и справочной литературе. Нами такая кривая построена:

$$w_0\omega^2 = \left(\frac{4}{\pi} + \frac{10{,}502}{K_f} - \frac{34{,}511}{K_f^{1,5}} + \frac{33{,}420}{K_f^2}\right)\frac{q}{m}. \qquad (12)$$

Согласно этой формуле можно по известным решениям задач поперечного изгиба пластинок находить их основные частоты колебаний и, наоборот, по известным решениям задач свободных колебаний пластинок находить значения максимального прогиба.

Следует заметить, что на основании известного из справочника [7] равенства

$$N_0 = D\beta^2 = \sqrt{Dm}\omega,$$

справедливого для полигональных пластинок с шарнирно опертым контуром, выражение (12) можно преобразовать к следующему виду:

$$w_0 N_0^2 = \left(\frac{4}{\pi} + \frac{10{,}502}{K_f} - \frac{34{,}511}{K_f^{1,5}} + \frac{33{,}420}{K_f^2}\right) qD. \qquad (13)$$

Таким образом, все известные решения задач поперечного изгиба полигональных пластинок с шарнирно опертым контуром, могут быть использованы для определения критического усилия для таких пластинок при их всестороннем равномерном сжатии.

Связь основной частоты колебаний пластинок с максимальным прогибом можно аналитически описать, не прибегая к подсчету коэффициента формы. Путем регрессионного анализа результатов известных решений для пластинок с любыми граничными условиями была построена аппроксимирующая функция:

$$w_0 = \left(1{,}877\cdot10^{-3} - 4{,}006\cdot10^{-5}k^2 + 2{,}312\cdot10^{-7}k^4 - 0{,}296k^{-3} + 2{,}429k^{-4}\right)\frac{qA^2}{D}, \qquad (14)$$

где k – собственное значение дифференциального уравнения колебаний. Графически эта зависимость представлена на рис. 4 (зависимость ω – w_0 для всего множества пластинок с любыми граничными условиями).

Рис . 4

ВЫВОДЫ

Использование геометрической характеристики формы области (коэффициента формы) для анализа интегральных физических характеристик пластинок позволило выявить три закономерности, имеющих фундаментальное значение в технической теории пластинок.

1. Интегральная геометрическая характеристика формы пластинок (коэффициент формы K_f) является геометрическим аналогом физических характеристик (максимальный прогиб под действием равномерно распределенной нагрузки w_0, основная частота колебаний в ненагруженном состоянии ω, критическое усилие при равномерном всестороннем сжатии N_0). С ее помощью можно проводить и качественный, и количественный анализ физических характеристик пластинок.

2. Все множество интегральных физических характеристик пластинок F, представленное в координатных осях F – K_f, ограничено с двух сторон: одну из границ (нижнюю или верхнюю) образуют эллиптические пластинки, другую границу (верхнюю или нижнюю) – пластинки в виде правильных многоугольников и равнобедренных треугольников.

3. Произведение $w_0 \cdot \omega^2$ для всего множества пластинок ограничено с двух сторон: верхняя граница с точностью до размерного множителя равна $(4/\pi)^2$ и соответствует круглым пластинкам, а нижняя равна $4/\pi$ и соответствует бесконечно вытянутым пластинкам (балкам); для пластинок одинаковых форм произведение $w_0 \cdot \omega^2$ не зависит от вида граничных условий и с точностью до размерного множителя является величиной постоянной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробко А.В.* Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. – М.: Изд-во АСВ, 1999.

2. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1966.

3. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. – Киев: Наукова думка, 1964.

4. *Пратусевич Я.А.* Вариационные методы в строительной механике. – М.-Л.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1948.

5. *Коробко В.И., Коробко А.В.* Контроль качества строительных конструкций: Виброакустические технологии. – М.: Изд-во АСВ, 2003.

6. *Коробко В.И., Коробко А.В.* Строительная механика пластинок: Техническая теория. – М.: Издательский дом "Спектр", 2010.

7. Справочник по теории упругости. – Киев: Будівельник, 1971.

REFERENCES

1. Korobko A.V. Geometricheskoe modelirovanie formy oblasti v dvumernyh zadachah teorii uprugosti. – M.: Izd-vo ASV, 1999.

2. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. Plastinki i obolochki. – M.: Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoj literatury, 1966.

3. Gontkevich V.S. Sobstvennye kolebanija plastinok i obolochek. – Kiev: Naukova dumka, 1964.

4. Pratusevich Ja.A. Variacionnye metody v stroitel'noj mehanike. – M.-L.: Gosizdat tehniko-teoreticheskoj literatury, 1948.

5. Korobko V.I., Korobko A.V. Kontrol' kachestva stroitel'nyh konstrukcij: Vibroakusticheskie tehnologii. – M.: Izd-vo ASV, 2003.

6. Korobko V.I., Korobko A.V. Stroitel'naja mehanika plastinok: Tehnicheskaja teorija. – M.: Izdatel'skij dom "Spektr", 2010.

7. Spravochnik po teorii uprugosti. – Kiev: Budivel'nik, 1971.

Рекомендована кафедрой уникальных зданий и сооружений ЮЗГУ. Поступила 08.04.16.