УДК 624.072

# ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МПА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ОСНОВНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ ТЕКСТИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

# THE APPLICATION OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS METHOD ON SOLVING STABILITY PROBLEMS OF MAIN STRUCTURAL ELEMENTS OF TEXTILE INDUSTRY STRUCTURES AND BUILDINGS

*Р.Ф. ГАББАСОВ, В.В. ФИЛАТОВ, М.В. АЛЕКСАНДРОВСКИЙ*
*R.F. GABBASOV, V.V. FILATOV, M.V. ALEKSANDROVSKY*

**(Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет)**
**(National Research Moscow State Construction University)**
E-mail: stroitmeh@mgsu.ru, FilatovVV@mgsu.ru; AleksandrovskiyMV@mgsu.ru

***В статье представлена численная методика расчета стержней переменного сечения на устойчивость и продольно-поперечный изгиб, которая может быть использована при проектировании колонн и балок переменного сечения зданий и сооружений текстильной промышленности. Дифференциальное уравнение оси сжато-изогнутого стержня переменной жесткости четвертого порядка сведено к двум дифференциальным уравнениям второго порядка, которые решаются с использованием разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА). Приведены примеры расчета стержней на устойчивость.***

***The paper presents a numerical technique for calculating frame elements with variable cross-sections for strength and longitudinal-transverse bending, which can be used in designing of columns and beams with variable cross-sections in buildings and structures of textile industries. the presented technique is based on simplifying the forth (4th) order differential equation of a beam-column element (element subjected to bending beside axial compression) with variable stiffness, to a couple of differential equations of the second (2nd) order which are solved using the difference equations of successive approximations method. The proposed technique is explained through given illustrative examples of beam-column elements calculated to strength.***

**Ключевые слова: стержни переменного сечения, устойчивость стержней, сжато-изогнутые стержни, разностные уравнения МПА, численные методы.**

**Keywords: frame elements (rods) with variable cross-sections, stability of frame elements (rods), squeezed beam-columns, difference equations of successive approximations method, numerical methods.**

При расчете зданий и сооружений текстильной промышленности, в силу специфики их эксплуатации, становится актуальным вопрос о методике расчета на устойчивость наиболее распространенных конструктивных элементов. Это центрально и внецентренно сжатые колонны ступенчатого сечения многоэтажных каркасов; балки, испытывающие при поперечном изгибе влияние продольных усилий температурного или технологического характера и т.п. Работу этих элементов можно описать, используя модель стержня переменного сечения. В некоторых случаях данную модель используют для приближенной оценки устойчивости всего сооружения [1…3].

Дифференциальное уравнение изгиба стержня переменного сечения с учетом влияния продольных сил на изгибные деформации четвертого порядка [4] запишем в виде двух дифференциальных уравнений второго порядка в безразмерных величинах [5]:

$$\frac{d^2m}{d\xi^2} = -(p + kgm), \qquad (1)$$

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} = -gm, \qquad (2)$$

где $\xi = \frac{x}{\ell}$; $m = \frac{M}{p_0\ell^2}$; $k = \frac{N\ell^2}{EJ_0}$; $p = \frac{p(x)}{p_0}$; $w = W\frac{EJ_0}{p_0\ell^4}$; $g = \frac{EJ_0}{EJ(x)}$; $\ell$– характерный размер (пролет); $p_0$ – интенсивность нагрузки в какой – либо точке; $EJ_0$ – жесткость поперечного сечения; M, W, N – значения изгибающего момента, прогиба и продольного усилия. В качестве положительного направления в (1) принято направление сжимающей силы.

Дифференциальные уравнения (1) и (2) решаются с учетом следующих краевых условий. Шарнирное опирание конца стержня: $m = m_0$; $w = w_0$; конец стержня жестко заделан: $w = w_0$; $w^{\xi} = \varphi_0$; конец стержня свободен от закреплений: $m = m_0$; $m^{\xi} = q_0 + k_0\varphi_0$. Здесь $w^{\xi} = \frac{dw}{d\xi}$; $m^{\xi} = \frac{dm}{d\xi}$; $m_0$; $w_0$; $\varphi_0$; $k_0$; $q_0$ – заданные величины, в частности равные нулю.

Дифференциальные уравнения (1) и (2) во всех регулярных точках сетки заменяются разностными уравнениями МПА. Приведем здесь по [5] уравнение, аппроксимирующее (1) при непрерывных m ($\Delta m = 0$):

$$\begin{gathered} m_{i-1} - 2m_i + m_{i+1} + h\Delta m_i^{\xi} + \\ + \frac{h^2}{12}\left({}^{\Pi}k_{i-1}\,{}^{\Pi}g_{i-1}m_{i-1} + 10\,{}^{\Lambda}k_i\,{}^{\Lambda}g_i m_i + {}^{\Lambda}k_{i+1}\,{}^{\Lambda}g_{i+1}m_{i+1}\right) - \\ - \frac{5}{12}h^2\Delta(kgm)_i - \frac{h^3}{12}\Delta(kgm)_i^{\xi} = 0, \end{gathered} \qquad (3)$$

где $\Delta(kgm)_i = \left({}^{\Lambda}k_i\,{}^{\Lambda}g_i - {}^{\Pi}k_i\,{}^{\Pi}g_i\right)m_i$; $\Delta(kgm)_i^{\xi} = {}^{\Lambda}(kgm)_i^{\xi} - {}^{\Pi}(kgm)_i^{\xi}$, верхние левые индексы "л" и "п" указывают на то, что значение функции берется левее или правее рассматриваемой точки соответственно.

Изменение g по длине стержня произвольное. Уравнения (1) и (2) в разностной форме МПА применяются для расчета балок на продольно - поперечный изгиб. С использованием указанной методики могут рассчитываться балки: однопролетные, многопролетные, статически определимые, статически неопределимые, на упругом основании, на упругоподатливых опорах, с односторонними связями. Нагрузка может быть распределена по всей балке или по отдельным участкам по любому закону, она может включать в себя сосредоточенные продольные и поперечные силы и сосредоточенные моменты. В качестве внешних воздействий могут быть заданы также осадки опор и углы поворота заделанных концов. Метод расчета распространен также на тепловое воздействие.

Если в (1) положить $k = 0$, то получим уравнения для расчета балки на поперечный изгиб. Если $p = 0$, то соответствующие разностные уравнения можно получить для расчета на устойчивость стержней переменного сечения (кусочно - переменного).

Сетка на ось балки должна быть нанесена так, чтобы точки приложения сосредоточенных сил и моментов, точки разрыва распределенных нагрузок и точки жесткости, а также опорные точки могли быть приняты за расчетные, то есть эти точки должны служить узлами сетки.

При расчете статически определимых балок алгоритм сводится к последовательному решению системы алгебраических уравнений, аппроксимирующих соответственно (1) и (2). При расчете статически неопределимых балок эти две системы решаются совместно, одновременно определяются m и w во всех точках расчетной сетки. При этом можно использовать итерационный метод Зейделя без составления матрицы коэффициентов общей системы уравнений. Рекуррентные выражения, справедливые для любой точки сетки, записываются лишь один раз. Итерационный процесс быстро сходится.

В качестве первого примера рассмотрим расчет на устойчивость сжатого стержня силой k однопролетного шарнирно опертого стержня постоянной жесткости (g = 1) (рис. 1).

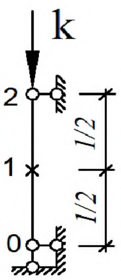


Рис. 1

Разностное уравнение МПА, аппроксимирующее (1), для произвольной точки i одномерной сетки принимает вид:

$$(1+\frac{h^2}{12}k)m_{i-1}-2(1-5\frac{h^2}{12}k)m_i+(1+\frac{h^2}{12}k)m_{i+1}=0\,. \quad (4)$$

При делении стержня на два участка (h=1/2), а $m_0 = m_2 = 0$; из (3) имеем:

$$(1-\frac{5}{12}\frac{1}{4}k)=0\,,$$

откуда K = 9,6, что на 2,7% меньше точного значения $\pi^2$.

При h = 1/4: $k_1 = k_{min} = 9{,}85$; $k_2 = 38{,}4$; $k_3 = 76{,}4$; соответствующие отличия решения от первых трех точных значений k составят: - 0,2%; - 2,75%;- 14% [6].

В качестве второго примера рассмотрим двухпролетный шарнирно опертый стержень единичной длины, сжатый силой k (рис. 2).


Рис. 2

Учитывая краевые условия: $m_1 = m_5 = w_1 = w_5 = 0$, составим систему уравнений, аппроксимирующих (1) и (2) в регулярных точках:

$$\begin{cases} -2m_2+m_3+\frac{1}{12}\frac{1}{4^2}k(10m_2+m_3)=0, \\ -2w_2=-\frac{1}{12}\frac{1}{4^2}k(10m_2+m_3), \\ m_2-2m_3+m_4+\frac{1}{4}\Delta m_3^{\xi}+\frac{1}{12}\frac{1}{4^2}k(m_2+10m_3+m_4)-\frac{1}{12}\frac{1}{4^2}k\Delta m_3^{\xi}=0, \\ w_2+w_4=-\frac{1}{12}\frac{1}{4^2}(m_2+10m_3+m_4)+\frac{1}{12}\frac{1}{4^3}k\Delta m_3^{\xi}, \\ m_3-2m_4+\frac{1}{12}\frac{1}{4^2}(m_3+10m_4), \\ -2w_4=-\frac{1}{12}\frac{1}{4^2}(m_3+10m_4). \end{cases} \quad (5)$$

Из решения системы получим k = 38,4, что на 2,75% меньше точного значения, равного $(2\pi)^2$ [6].

Примеры расчета стержней, а также пластин на устойчивость с другими краевыми условиями при различных законах изменения g имеются в [7…9]. В этих работах выполнено численное исследование сходимости решений.

## ВЫВОДЫ

1. Разностные уравнения МПА учитывают конечные разрывы искомой функции, ее первых двух производных и правой части исходных дифференциальных уравнений.

2. Алгоритмы, построенные на базе разностных уравнений МПА, позволяют полностью определять напряженно деформированное состояние конструкций при расчете на поперечный и продольно-поперечный изгиб. Этот простой и вместе с тем эффективный метод может быть рекомендован к использованию в расчетной практике проектных организаций текстильной промышленности.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Шеин А.И., Завьялова О.Б.* Приближенный способ расчета на устойчивость многоэтажных рам // Региональная архитектура и строительство. – 2014, №1. С.89…95.
2. *Шевченко Ф.Л., Улитин Г.М., Царенко С.Н.* Расчет на устойчивость составных металлоконструкций переменной жесткости// Вісник СевНТУ: зб. наук. пр. Вип. 133/2012. Серія: Механіка, енергетика, екологія. – Севастополь, 2012. С. 85...89
3. *Тамразян А.Г., Мкртычев О.В., Дорожинский В.Б.* Расчет большепролетной конструкции на аварийные воздействия методами нелинейной динамики // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012, № 5. С. 331...334.
4. *Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А.* Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Изд-во АСВ, 1996.
5. *Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В.* Численное построение разрывных решений задач строительной механики. – М.: Изд-во АСВ, 2008.
6. *Киселев В.А.* Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1980.
7. *Кайдалов Б.П.* Численный метод последовательных аппроксимаций в задачах устойчивости пластин и стержней: Дис.... канд. техн. наук. – М., 1985.
8. *Tamrazyan A., Filimonova E.* Searching method of optimization of bending reinforced concrete slabs with simultaneous assessment of criterion function and the boundary conditions // Applied Mechanics and Materials. – T. 467, 2014. P. 404...409.
9. *Тамразян А.Г.* Динамическая устойчивость сжатого железобетонного элемента как вязкоупругого стержня// Вестник МГСУ. – 2011, № 1-2. С.193…196.


## REFERENCES


1. Shein A.I., Zav'jalova O.B. Priblizhennyj sposob rascheta na ustojchivost' mnogojetazhnyh ram // Regional'naja arhitektura i stroitel'stvo. – 2014, №1. S.89…95.
2. Shevchenko F.L., Ulitin G.M., Carenko S.N. Raschet na ustojchivost' sostavnyh metallokonstrukcij peremennoj zhestkosti// Visnik SevNTU: zb. nauk. pr. Vip. 133/2012. Serija: Mehanika, energetika, ekologija. – Sevastopol', 2012. S. 85...89
3. Tamrazjan A.G., Mkrtychev O.V., Dorozhinskij V.B. Raschet bol'sheproletnoj konstrukcii na avarijnye vozdejstvija metodami nelinejnoj dinamiki // Nauchno-tehnicheskij vestnik Povolzh'ja. – 2012, № 5. S. 331...334.
4. Leont'ev N.N., Sobolev D.N., Amosov A.A. Osnovy stroitel'noj mehaniki sterzhnevyh sistem. – M.: Izd-vo ASV, 1996.
5. Gabbasov R.F., Gabbasov A.R., Filatov V.V. Chislennoe postroenie razryvnyh reshenij zadach stroitel'noj mehaniki. – M.: Izd-vo ASV, 2008.
6. Kiselev V.A. Stroitel'naja mehanika. Special'nyj kurs. Dinamika i ustojchivost' sooruzhenij. – M.: Strojizdat, 1980.
7. Kajdalov B.P. Chislennyj metod posledovatel'nyh approksimacij v zadachah ustojchivosti plastin i sterzhnej: Dis.... kand. tehn. nauk. – M., 1985.
8. Tamrazyan A., Filimonova E. Searching method of optimization of bending reinforced concrete slabs with simultaneous assessment of criterion function and the boundary conditions // Applied Mechanics and Materials. – T. 467, 2014. P. 404...409.
9. Tamrazjan A.G. Dinamicheskaja ustojchivost' szhatogo zhelezobetonnogo jelementa kak vjazkouprugogo sterzhnja// Vestnik MGSU. – 2011, № 1-2. S.193…196.


Рекомендована кафедрой строительной механики. Поступила 07.03.17.